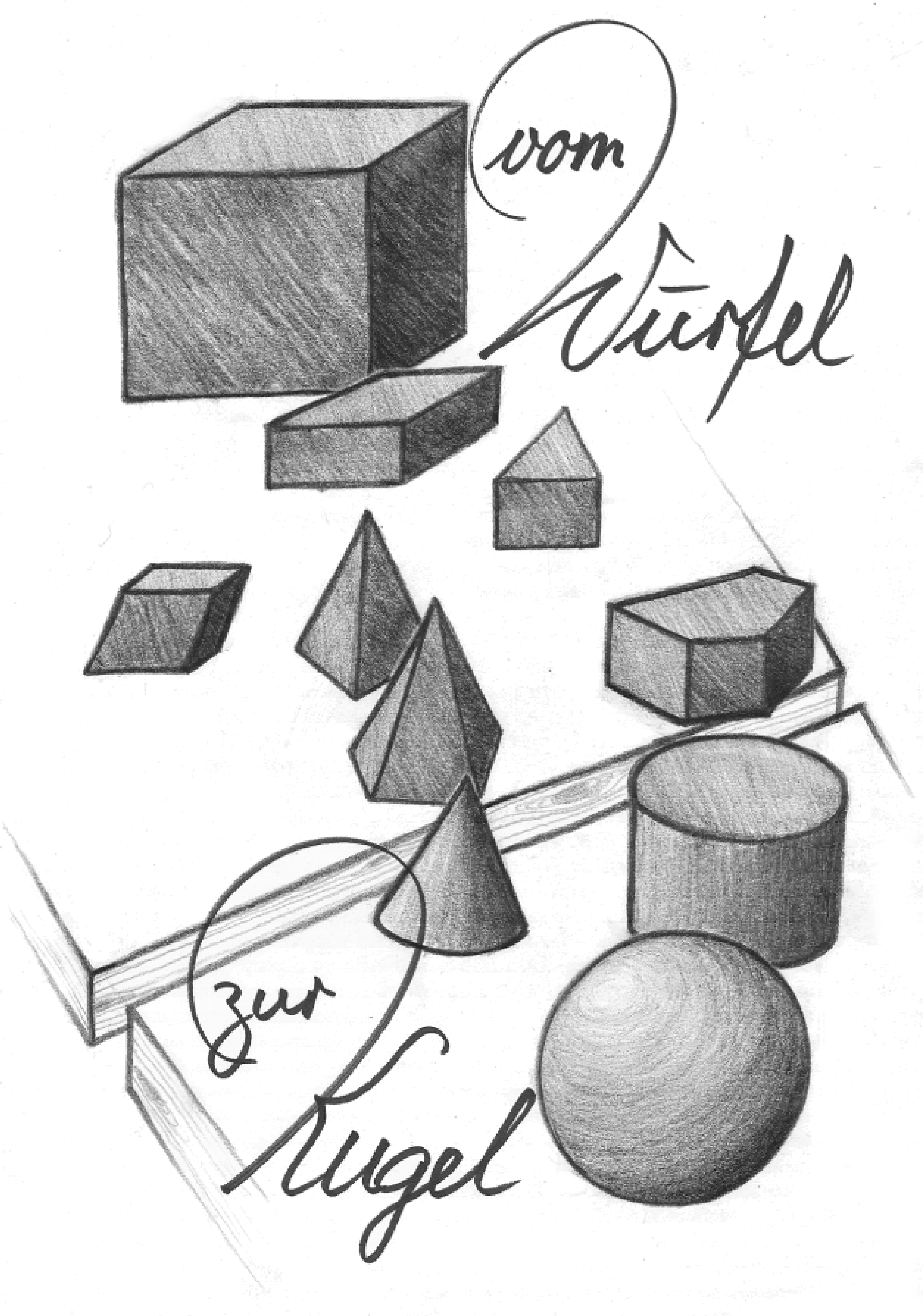
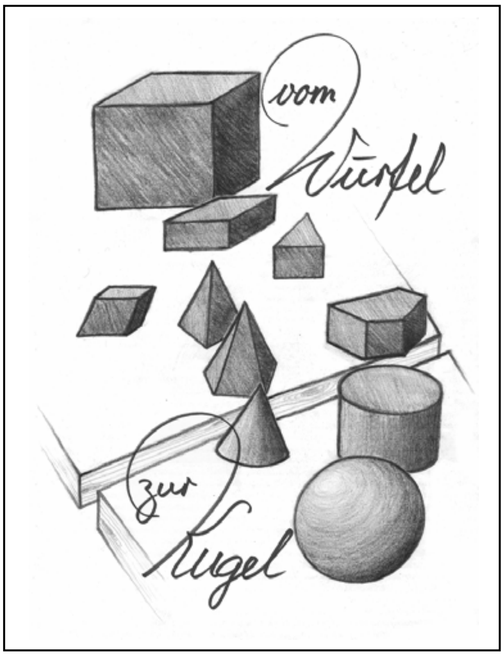

vom
Würfel
zur
Kugel

3. VOM WÜRFEL ZUR KUGEL MIT ARCHIMEDES

(Formen – Formulieren – Formeln)

Ein Lehrstück zur Stereometrie für die 9. Klasse des Gymnasiums



3.1 Einleitung, sowie Vorlagen von Martin Wagenschein

Die Berechnung von Körpern (Stereometrie) in der Mathematik wird oft zu einem leidvollen, trockenen Thema mit vielen Formeln. Wenn wir versuchen, den historischen Prozess, die Ideen von Euklid und insbesondere diejenigen von Archimedes einzubeziehen, gewinnt das Ganze an Spannung. Mathematisch gesehen, lassen sich dabei das Prinzip der *Intervallschachtelung* und dasjenige der *Rekursion* erleben, welche beide heute noch von grosser Bedeutung sind. Das von Archimedes entwickelte mathematische System kommt in vielem der modernen Infinitesimalrechnung nahe. Wir staunen über die Komplexität und logische Schärfe, mit der Archimedes vor rund 2250 Jahren argumentiert hat. Noch in diesem Jahrhundert ergänzten neue Entdeckungen unser Bild von Archimedes. Sie zeigen, wie er die gegensätzlichen Fähigkeiten des praktischen Ingenieurs und des theoretischen Mathematikers in genialer Weise verband. Mit dem Einbezug praktischer Überlegungen zur Gewinnung neuer Erkenntnisse (seiner sogenannten *Methode*; z.B. Bestimmung des Kugelvolumens) und der Anwendung von theoretischen Erkenntnissen in der Praxis (z.B. Hebelgesetz) steht er im Gegensatz zur reinen Ideenlehre von Platon. Archimedes legte damit den entscheidenden Grundstein zur Entfaltung der Naturwissenschaften.

Die Idee zu diesem Lehrstück entstand in der Berner Lehrkunstwerkstatt, einer Weiterbildungsgruppe der Berner Lehrerfortbildung unter der Leitung von Prof. Christoph Berg. Im September 1995 lasen wir den Text „Zweierlei Wissen“, in dem der Autor Martin Wagenschein (1980. S. 278f) zwei Betrachtungsweisen des leuchtenden Vollmondes ins Zentrum stellt: Die runde Scheibe und die gewölbte Halbkugel. Bald landeten wir bei folgenden Fragen: „Wie lässt sich die Oberfläche der Kugel berechnen?“, „Welchen Prozentanteil des

Martin Wagenschein:

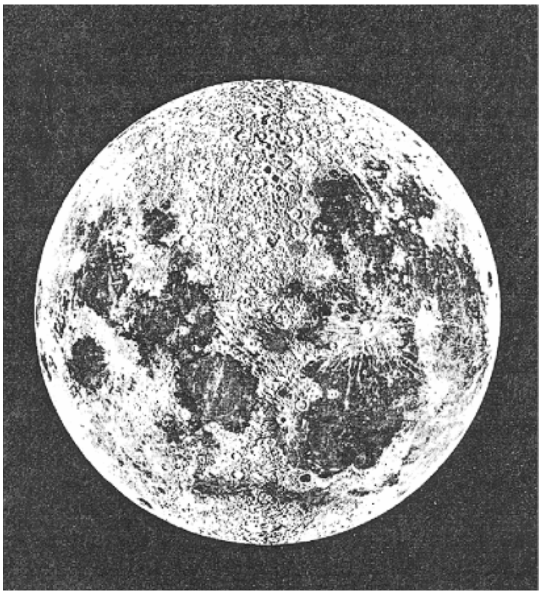
Zweierlei Wissen

Als er Kind war, Schüler, Jüngling, Student, da sagte man ihm: $4\pi r^2$, so rechnet man die Fläche der Kugel aus. 4 mal diese Zahl (die etwa 3.14 ist) mal r, der Länge des Halbmessers, und dann mal r noch einmal. Auch bewiesen hatte man es; es ging auf die Griechen zurück.

Erst als er dann später, dreissig Jahre alt, begann, eben dies die Kinder zu lehren, bemerkte er, dass es sich auch anschauen liess, ja ursprünglich von den Griechen angeschaut worden war und auch nur angeschaut werden konnte. Dass dieses $4\pi r^2$ nur eine späte Kurzschrift ist, gemacht für die Berechnenden, nicht mehr für die Schauenden; ein Automat, zu bedienen von jedermann. Dass es ja als „ $4\pi r^2$ " nichts anderes sagte, als dass die Kugeloberfläche genau viermal so gross sei als πr^2. Dies πr^2 aber war die Rechenvorschrift für die Fläche des „grössten Kreises" der Kugel, den sie, durch ihre Mitte aufgeschnitten, sehen lässt. So ist also, was uns der Apfel in der greifenden Hand als Schale bietet, vierfach das, was er von seinem Innern preisgibt, wenn wir ihn geradewegs mitten durchschneiden und auf die frische Innenfläche blicken.

In seinem einundfünfzigsten Jahr schaute er eines Abends die goldene Mondscheibe an, wie sie über dem Wald aufstieg: da sah er es noch einmal neu! So sehr war es das Alte und doch wieder etwas Neues, dass es ihn überraschen und entzücken konnte. Der Mond, so sagte er sich, wie sehe ich ihn doch noch immer so, wie ihn die Kinder sehen und vielleicht wir alle, wenn wir nicht gerade dabei *denken*: als ein flaches Goldblech, an den Himmel geheftet! Obwohl ich weiss, was ja nicht ohne weiteres zu sehen ist, und was irgendwann einmal, vor Sokrates, ein Mensch von eindringlichster Anschauungskraft zum erstenmal eingesehen haben muss - obwohl ich weiss, dass er als Ball im Raum hängt und mir seine Wölbung entgegenrundet.

Da begann er zu grübeln und zu schätzen, wievielmal nun wohl diese von ihm gesehene, wirklich gewölbte Mondfläche grösser sei als sie, fälschlich flach gesehen, erscheint; - Bis es ihn durchzuckte, dass er das seit langem wusste (und wohl doch nicht wusste?): dass sie ja eben genau doppelt so gross sein müsse: Denn wenn die ganze Kugel ihren grössten Kreis viermal fasst, so muss ihn die halbe Kugel, die allein ich ja übersehen kann, zweimal enthalten. Dieser grösste Kreis ist aber gerade das, was ich vom Mond zu sehen *glaube*, indem ich ihn als flachen Teller nehme. Zweimal mehr Fläche bietet mir der Mond, als ich zu sehen meine. Und so ist es bei jeder Kugel, wenn ich sie weit genug von mir halte. Aber der Mond hatte es ihn gelehrt, was der Ausdruck $4\pi r^2$ oder $2\pi r^2$ im Grunde sagen will.



So verschmolz ihm die griechische Entdeckung der Formel für die Kugelfläche mit der anderen griechischen Einsicht, dass der Mond nicht Scheibe, sondern Kugel sei, Halbkugel, soweit wir ihn überblicken. (. . . .) Damals bei den Griechen erwuchs diese Blüte. Und nicht nur, dass sie es wussten: sie erwiesen es auch, dass es so und nicht anders sein müsse. So rund und glatt das Ergebnis, so wussten sie doch, es war ein feiner, ein unendlicher Prozess zu überstehen, ehe man es erkennen konnte. Sie dachten ihn zu Ende, und ihr Scharfsinn liess sie einen Fund machen von einfachster Anschaulichkeit, der golden an ihrem Himmel stand.
(Wagenschein, 1980, S. 278f)

Martin Wagenschein

Kern und Schale runder Dinge

Formeln genügen nicht. Formelsammlungen, wie zum Beispiel diese:

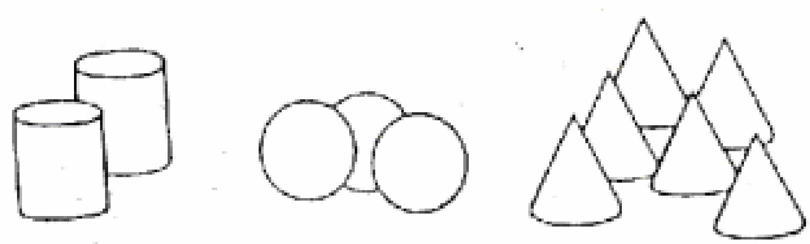
	UMFANG	FLÄCHE	VOLUMEN
QUADRAT	$4a$	a^2	---
KREIS	$2\pi r$	πr^2	---
WÜRFEL	---	$6a^2$	a^3
ZYLINDER	$2\pi r$	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$\pi r^2 h$
KEGEL	---	$\pi r^2 + \pi rs$	$\pi r^2 h / 3$
KUGEL	$2\pi r$	$4\pi r^2$	$4\pi r^3 / 3$

haben etwas Trockenes und Abschreckendes für den, der die Mathematik nicht kennt oder sich von ihr entfernt hat, so dass er die Zeichen nicht oder nicht mehr auf die rechte Art zu lesen weiss. Und doch sind sie nichts als eine Kurzschrift für höchst anschauliche und merkwürdige Zusammenhänge, die sich auch in Worten sagen lassen und dann von jedermann verstanden werden können. Ja, ursprünglich, von den Mathematikern des alten Griechenlandes, konnten sie nur in Worten gesagt werden, und erst später wurden sie in die geniale und nützliche, aber für den Unbelehrten dunkle Kürze der Formel gedrängt. (...)

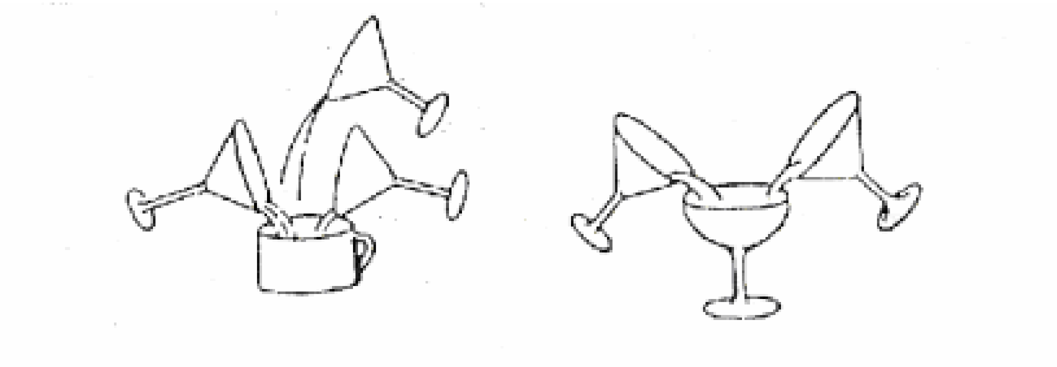
In vielen der hier zusammengestellten Formeln, steckt das merkwürdige Zeichen „π“. Es wird gesprochen „pi“ und ist der Geheimschlüssel für die Massverhältnisse aller runden (*kreis*-runden) Dinge. Es sitzt in unseren Rechnungen, mögen sie nun dem Räderwerk der Maschinen gelten oder den Bahnen der Gestirne oder den Elektronenwirbeln der Atome. (...)

So sehen wir überall denselben Gesetzgeber π am Werk, wo das Krumme und Runde in Beziehung gesetzt werden soll zum Geraden, Eckigen, Ebenen. Manchmal allerdings ist das Eckige, das πmal genommen werden muss, nicht so einfach, wie man es wünschen möchte. Aber man muss die Dinge nur auf die rechte Weise ansehen, dann werden sie einfach. Das Gerade und das Krumme sind nun einmal zueinander fremde Welten, und wenn man den Übergang von der einen zur anderen jedesmal, bei jedem neuen Ding, neu beschreitet, so kann man sich nicht wundern, wenn manchmal Engpässe zu durchschreiten sind.

Macht man es aber anders, geht man *ein*mal hinüber, an einer bequemen Stelle, gleich beim Kreis zum Beispiel, und bleibt dann drüben bei den runden Dingen, und setzt sie nun *untereinander* in Beziehung, so eröffnet sich ein grossartig einfaches Bild. Hier hat der Grenzpolizist π nichts mehr zu suchen.



Die 2 Eimer fassen soviel wie die 3 Ballen oder wie die 6 Tüten.



3 Kelche füllen einen Becher, 2 Kelche einen Römer.

Miteinander stehen die runden Dinge in den einfachsten Verhältnissen, die es gibt, denen der ganzen Zahlen! Auch das sagen uns diese Formeln. Die erstaunlichste Beziehung besteht zwischen Kegel, Kugel und Zylinder. Sie wurde gefunden und verstanden von dem griechischen Mathematiker ARCHIMEDES (gest. 212 v. Chr.), und sie enthüllt sich dann, wenn man diese drei Körper so wählt, dass sie ineinander genau *passen*, wenn man sie also über demselben Kreis aufbaut und alle gleich hoch macht, und also auch gleich breit. Dann zeigt sich nämlich, dass der Kegelinhalt sich genau zweimal in die Kugel und genau dreimal in den Zylinder füllen lässt. (...) Da dasselbe Verhältnis 1 : 2 : 3 auch für die *halben* Körper gilt, für die Halbkugel also und die zu ihr passenden Kegel und Zylinder, so kann man dasselbe auch an geeigneten *Gläsern* ausprobieren: 2 Kelche füllen den Römer, 3 Kelche den Becher.

(Wagenschein: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Band I 1965 S. 67-71)

Archimedes
Sätze über Zylinder und Kugel

Satz aus § 13: „Der Mantel eines jeden geraden Zylinders ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zwischen der Seitenlinie und dem Durchmesser der Zylinders.“ * (Archimedes 1996 S. 93)

Satz aus § 33: „Die Oberfläche der Kugel ist viermal so gross wie die Fläche ihres grössten Kugelkreises.“ (ebda S. 114)

Satz aus § 34: „Der Inhalt der Kugel ist viermal so gross wie der eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Fläche des grössten Kugelkreises und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.“ (ebda S. 115)

KOROLLAR: „Nach dem soeben Bewiesenen ist klar, dass jeder Zylinder, dessen Grundkreisradius gleich dem Radius der Kugel, und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, 1 ½ mal so gross ist wie die Kugel, und dass auch die Gesamtoberfläche des Zylinders 1 ½ mal so gross ist wie die Oberfläche der Kugel.
Denn der Inhalt des beschriebenen Zylinders ist sechsmal so gross wie der eines Kegels von gleicher Grundfläche und halber Höhe. Von der Kugel aber wurde gezeigt, dass ihr Inhalt viermal so gross sei. Es ist also klar, dass der Inhalt des Zylinders 1 ½ mal so gross ist wie der Inhalt des Kegels. Andrerseits ist bekanntlich der Mantel eines Zylinders gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zwischen der Höhe und dem Durchmesser der Grundfläche des Zylinders. Bei unserem, der Kugel umbeschriebenen Zylinder sind Höhe und Durchmesser gleich. Der Kreis aber, dessen Radius gleich dem Durchmesser der Zylindergrundfläche ist, ist viermal so gross wie

diese Grundfläche, d.h. also, wie die Fläche des grössten Kugelkreises. Demnach wird der Mantel des Zylinders viermal so gross sein wie die Fläche des grössten Kugelkreises. Die Gesamtoberfläche des Zylinders ist also sechsmal so gross wie die Fläche des grössten Kugelkreises. Aber die Oberfläche der Kugel ist viermal so gross wie die Fläche des grössten Kugelkreises. Die Oberfläche des Zylinders ist also 1 ½ mal so gross wie die der Kugel.“ (ebda S. 117)
* Anmerkung: r heisst **mittlere Proportionale** von s und d, wenn gilt $s : r = r : d$. Daraus folgt $r^2 = s \cdot d$.

Archimedes
Sandrechnung

Ein berühmter Versuch, in das dunkle „Viel“ der grossen Zahlen vorzustossen mit dem Hauptzweck, das Zahlengebäude weit über alles irdisch Vorstellbare hinaus dem Unendlichen entgegenstreben zu lassen, ist die uns überlieferte *„Sandrechnung“* (griechisch *psammites*, von *psammos* = der Sand) von Archimedes. In einem Brief an König Gelon von Syrakus belehrt er diesen, dass des Sandes am Meer nicht unendlich sei. Folgen wir seinen Worten und damit auch den Worten von F. Müller, der dies so anschaulich beschreibt.
„Manche Leute glauben, König GELON, die Zahl der Sandkörner sei unbegrenzt. Andere meinen, die Zahl sei zwar nicht unbegrenzt, aber es sei noch nie eine Zahl genannt worden, die die des Sandes übertrifft. Ich aber will Dir zu zeigen versuchen, dass unter den von mir benannten Zahlen nicht nur einige die Zahl eines Sandhaufens von Erdgrösse übersteigen, sondern auch die Zahl eines Haufens, der das Weltall füllt.“
Die benannte griechische Zahlreihe von damals schloss, (...) mit $10\,000 = 10^4$, der *Myriade* (griechisch *myrioi* = 1 Myriade). ARCHIMEDES fasst nun die Zahlen von 1 bis zu $10^4 \cdot 10^4 = 10^8 = 1$ Myriade Myriaden als die *„Zahlen 1. Ordnung“* zusammen. 10^8 ist nun die Einheit der 2. Stufe, der *„Zahlen 2. Ordnung“*, die bis $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16} = 10^{8 \cdot 2}$ reichen. Hier beginnt die 3. Stufe mit allen Zahlen 3. Ordnung bis zu $10^{24} = 10^{8 \cdot 3}$ usw. So fortschreitend, gelangt ARCHIMEDES rein gedanklich bis zu den Zahlen der myriad-myriadsten Ordnung, das heisst bis zu $P = 10^{8 \cdot 10^8}$ (eine 1 mit 800 *Millionen Nullen*). Diese Zahlen von 1 bis P nennt er dann die *„Zahlen der 1. Periode“*. Nun schreitet ARCHIMEDES so fort, dass er die 1. Ordnung der 2. Periode bildet und gelangt so bis $10^8 \cdot P$, dann folgt die 2. Ordnung dieser Periode bis $10^{16} \cdot P$, sodann die 3. Ordnung bis $10^{24} \cdot P$ usw., bis zur 10^8. Ordnung der 2. Periode = $10^{8 \cdot 10^8} \cdot P = P^2$. Dann baut er ebenso eine 3. Periode, eine 4., 5. usw. auf und hört schliesslich bei der myriad-myriadsten Periode = $P^{10^8} = 10^{8 \cdot 10^8 \cdot 10^8} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$ auf. Diese Zahl, in Ziffern ausgeschrieben, ist eine 1 mit *80 000 Billionen Nullen*! Es ist die 10^8. Zahl der 10^8. Ordnung der 10^8. Periode. Wollte man diesen enormen Zahlenriesen auf einem Streifen Papier aufschreiben, und zwar etwa so, dass auf einer Papierlänge von 1 cm immer 2 Ziffern zu stehen kämen, so bedeutete die Lieferung des dazu notwendigen Papierstreifens für sämtliche Papierfabriken der Erde einen nicht leicht zu bewältigenden Auftrag: der Streifen müsste *400 Milliarden Kilometer* lang sein, oder, was dasselbe bedeutet: man könnte mit ihm die Distanz Erde-Sonne (150 Millionen Kilometer) ungefähr 2700mal abmessen! Nun hätte ARCHIMEDES für die Berechnung der Sandkörner in der Weltkugel allerdings lange nicht so weit gehen müssen. Er findet nämlich für seine „Sandzahl“, nachdem er auf Grund von Vergleichen alle Nebenrechnungen sowie die Berechnung des Weltkugelvolumens gemeistert hatte, den Wert 10^{63}, was also 10 mal kleiner als 10^{64} ist, das heisst die Zahl der Sandkörner im Archimedischen Kosmos lässt sich durch eine Zahl angeben, die bereits in der 8. Ordnung der 1. Periode liegt.
(nach F. Müller: „Im Anfang war die Zahl“, Büchergilde Gutenberg 1954, S. 24f)

Volumens nimmt die Kugel im Würfel ein?", „In welcher Beziehung stehen Kreis und umschriebenes Quadrat?"

Noch stundenlang kreisten meine Gedanken bei diesen Fragen. Anderntags brachte ich haufenweise Material in die Sitzung: Kugeln, Kegel, Würfel, Kristalle, Waage, ... Der Diskurs wurde lebhaft fortgesetzt. Im Artikel: „Kern und Schale runder Dinge" von Martin Wagenschein (Wagenschein 1965, S. 67-74) werden die Formeln zur Berechnung von Volumen und Oberfläche von Körpern auf vielfältige Art und Weise veranschaulicht. Der Autor schreibt dazu: „Wenn wir in dieser Weise die Formel in ihrem *anschaulichen* Gehalt erfassen, sind wir der Mathematik *näher*, als wenn wir sie nur merken und praktisch benutzen. Und doch sind unsere Betrachtungen noch nicht wahre Mathematik! Sie sind ja nur ein Anschauen von *Ergebnissen*. Erst wenn aus dem Ansehen ein Einsehen wird, und aus dem An-schauen ein Durch-schauen, wenn wir forschen und verstehen, *warum* die Kugel zwei Drittel ihres Zylinders fassen *muss* - erst dann denken wir mathematisch. Darauf haben wir in diesem Aufsatz verzichtet, denn das ist ein weites Feld." So wurde ich motiviert, in dieses weite Feld vorzudringen und genauer der Herkunft und Herleitung dieser Formeln nachzugehen. Bald zeigte sich, wie eng der Übergang vom Eckigen zum Runden, vom Quadrat zum Kreis und vom Würfel zur Kugel mit der Person von Archimedes von Syrakus verknüpft ist.
Im weiteren wurde mir klar, dass ich den Bogen vom Würfel bis zur Kugel spannen wollte, um eine Einheit zu erhalten, auch wenn den Schülerinnen und Schülern im 9. Schuljahr die Berechnung der einfachsten geradlinig begrenzten Körper bekannt sein sollte. So entwickelte sich ein eher langes Lehrstück von gut 20 Lektionen Umfang, in dem bei der Durchführung gezielt Schwerpunkte zu setzen sind.

3.2 Struktur des Lehrstücks

Im kurzen Überblick sieht die Struktur folgendermassen aus. Je nach Klasse lasse ich manchmal allerdings den Auftakt weg und steige direkt in den ersten Akt mit der Exposition des Lehrstücks.

Auftakt:
In der „Sandrechnung" begegnen wir der Denkweise und Genialität von Archimedes.

I. Akt: Exposition des Lehrstücks: Würfel, Kugel und Verwandte
Aus Ton erschaffen wir uns die Familie der Körper, lernen ihre Namen und gegenseitige Verwandtschaft kennen und strukturieren den weiteren Verlauf des Lehrstücks.

II. Akt: Im Eckenland: Vom Würfel zu Quader, Prisma und Pyramide
Wir beschäftigen uns mit den Körpern des Eckenlandes und ihren gegenseitigen Beziehungen.

III. Akt: Der Kreis in der Ebene als Steg über die Kluft
Die Annäherung des Runden durch das Gerade, des Kreises durch Vielecke führt uns mit Archimedes zur Zahl π, dem Schlüssel für die runden Körper.

IV. Akt: Im Rundland: Über Zylinder und Kegel zur Kugel
Dank der gewonnenen Zahl π lernen wir die Körper im Rundland verstehen und staunen über die einfachen Zahlverhältnisse zwischen ihnen.

Abschluss: Rückblick und Schlussbetrachtungen
Eine Zusammenfassung der Erkenntnisse, Analogien und offene Fragen bilden den würdigen Abschluss des von Archimedes geprägten Lehrstücks.

Im ausführlicheren Lehrstückgrundriss erfahren wir mehr über das Lehrstück, wie es anschliessend ausführlich in der Durchführung beschrieben wird.

Auftakt: In der „Sandrechnung“ begegnen wir erstmals Archimedes, wie er beweist, dass es nicht unendlich viele Sandkörner am Meer gibt, indem er den ganzen damaligen Kosmos als endliche Kugel auffasst und den bisherigen Zahlbereich weit über alles irdisch Vorstellbare erweitert. Er schmettert uns aber nicht nur hinaus in den weiten Kosmos, sondern bleibt auf dem Boden, wo er mit den Händen praktisch und dem Kopf theoretisch Hervorragendes leistet.

I. Akt: Der erste Akt dient der **Exposition** des Stücks. Aus Ton entstehen in unseren Händen als einfachste Körper rasch die **Kugel** und der **Würfel**, gegensätzliche Pole von Hand und Kopf, von Praxis und Theorie, von Natur und Geist. Es entstehen weitere einfache Körper wie Quader, Prisma, Pyramide, Kegel, Zylinder, . . . Gemäss ihrer gegenseitigen **Verwandtschaft** ordnen wir diese Körper auf dem Tisch an. Dabei ergibt sich ein Weg vom Würfel zur Kugel und damit die Struktur für den weiteren Verlauf des Lehrstücks. Dieser entspricht in etwa dem historischen Prozess zur Bestimmung von Oberfläche und Volumen dieser Körper.

II. Akt: Vorerst beschränken wir uns auf das **Eckenland**. Vieles ist im 9./10. Schuljahr bereits bekannt. Wir rekapitulieren, begründen, schaffen Analogien zur Ebene, geniessen die Phänomene, begründen anhand der Tonmodelle, ohne allzusehr in die Tiefe zu gehen. Allenfalls lässt sich zeigen, wie Euklid das Volumen der Pyramide von innen durch Spate, das sind „schiefgedrückte Quader“, ausschöpft. So sind bald alle (wieder) vertraut mit Volumen und Oberfläche von Würfel, Quader, Spat, Prisma und Pyramide.

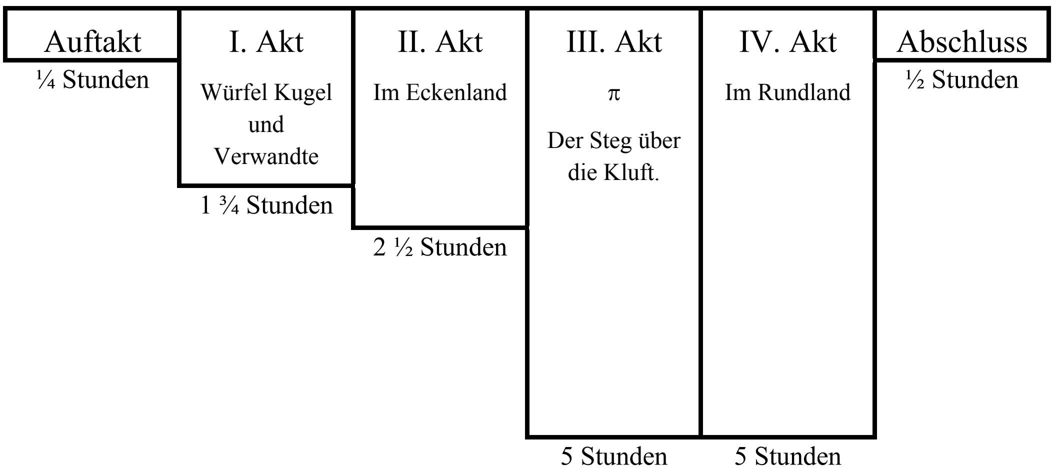
III. Akt: Es folgt ein grosses Zwischenspiel: **π, der Steg über die Kluft**. Es erweist sich vorteilhaft, den Übergang zum „Runden“ in der Ebene durchzuführen. Wir entwickeln dabei gemäss Archimedes eine *Rekursionsformel*, d.h. eine Formel, bei der die berechnete Grösse gleich wieder als Ausgangsgrösse für den nächsten Rechenschritt eingesetzt wird. Diese Formel erlaubt uns, Umfang und Fläche des Kreises beliebig genau von innen und später von aussen anzunähern. Dies ist das Prinzip der *Intervallschachtelung*, das hier optisch sichtbar wird. Der Taschenrechner ist uns eine grosse Hilfe und wir ahnen nur, wie aufwendig die Berechnungen damals gewesen sein müssen. Es zeigt sich, dass die Verhältnisse Umfang zu Durchmesser und Kreisfläche zu quadriertem Radius gleich gross sind; eine Grösse, die wir heute als π (Abkürzung für peripheria) kennen. Ein kurzer historischer Exkurs von der Bibel (mit $\pi \approx 3$) bis zur Neuzeit (von π sind über 2 Milliarden Stellen bekannt, unendlich viele Stellen werden uns für immer verborgen bleiben!) ist angezeigt. Heute wissen wir auch, dass sich diese universelle Konstante π sowohl der klassischen Konstruktion wie auch der vollständigen Berechnung letztlich entzieht, d. h. sie *musste* auf empirischem Wege angenähert werden! Zusätzlich machen wir Bekanntschaft mit dem Lebenswerk von Archimedes und den Legenden über ihn. Da er seine Erkenntnisse über Zylinder und Kugel am höchsten einstuft, werden wir neugierig auf den nächsten Akt.

IV. Akt: Wir lernen die Körper **im Rundland** kennen. Die Formeln für Zylinder und Kegel ergeben sich leicht aus dem bisher erarbeiteten. Für den Weiterverlauf lohnt es sich, bei Archimedes einfache Sätze nachzulesen, wie er schreibt, formuliert und begründet. Statt eine Zahl π und Gleichungen zu verwenden, muss er die Erkenntnisse durch Flächen- und Volumenvergleiche ausdrücken. Einen Höhepunkt in seinem mathematischen Schaffen bildet seine Herleitung von Kugelvolumen und Kugeloberfläche, ausführlich beschrieben in seiner Schrift: »Über Kugel und Zylinder«. In einem ersten Schritt verbindet er Praxis und Theorie auf geniale Weise und leitet unter Zuhilfenahme des von ihm entdeckten Hebelgesetzes das Kugelvolumen her. Damit begnügt er sich nicht, sondern liefert hinterher einen nicht minder genialen Beweis für Oberfläche und Volumen der Kugel. Als Quintessenz resultiert der von ihm gefundene sehr einfache und schöne Satz: „Der Zylinder, der die gleiche Grundfläche besitzt wie einer der grössten Kreise einer Kugel und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, ist sowohl seinem Inhalt als auch seiner Oberfläche nach eineinhalb mal so gross wie die Kugel." Jetzt wird einsichtig, warum er sich Kugel und Zylinder auf dem Grabstein verewigt wünschte!

Abschluss: Die **Nachbetrachtung** wird zum verdienten Schlussgenuss, zum Symposium zu Ehren von Archimedes. Wir fassen die Erkenntnisse zusammen, vergleichen Zylinder, Kugel und Kegel, betrachten den Vollmond nach Wagenschein, staunen nochmals über die Analogien zwischen den Formeln in der Ebene und im Raum. Wir würdigen seine geniale Verbindung von praktischer und theoretischer Schaffenskraft, welche bis in heutige Zeit seine Auswirkungen hat. Da sowohl die Inschrift als auch die Darstellung von Kugel und Zylinder auf dem Grabstein bis heute ein Rätsel geblieben sind, gestalten wir Grabsteine zu Ehren von Archimedes.

Das ganze Lehrstück ist mit rund 20 Lektionen eher lang. Ein Block von 3 bis 4 Lektionen für die Eröffnung ist von grossem Vorteil. Der Ablauf, welcher sich uns dort im sokratischen Gespräch aufdrängt, ist gleichzeitig auch der historische. Die Denkwege werden skizziert, dann begehbar und befahrbar, die Formeln für Oberfläche und Volumen der Körper nehmen Gestalt an, werden vertraut. Aus der Fülle des Materials müssen allerdings exemplarisch Schwerpunkte gesetzt werden. Je nach Vorkenntnissen und Interessen der Schülerinnen und Schüler liegen diese Schwerpunkte wieder anders. So wird das Lehrstück trotz vorliegender Grobstruktur bei jeder Durchführung auch für die Lehrperson zur erneuten Herausforderung.

Die Inszenierung des Lehrstücks benötigt etwa 20 Lektionen oder die Zeit von 15 Stunden, die sich folgendermassen auf die Akte verteilen:



3.3 Unterrichtsverlauf: 15 Stunden (in der Tertia)

Zum ersten Mal in seiner ganzen Länge habe ich das Lehrstück vor den Sommerferien 1996 am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld durchgeführt. Ein halbes Jahr später erhielt ich die Gelegenheit, mein Lehrstück an der Ecole d' Humanité mit einer Gruppe von Jugendlichen am Anfang des 10. Schuljahres zu inszenieren. Bis heute habe ich dieses Lehrstück mehrfach am Gymnasium Bern-Neufeld in Normalklassen mit rund 20 Schülern und Schülerinnen am Ende des 9. Schuljahres, wo es seinen idealen Platz findet, unterrichtet (vgl. Tabelle 3, S. 19).

Von Mal zu Mal hat sich das Lehrstück verändert und weiter entwickelt, Andere Schwerpunkte wurden wichtig. Die groben Züge sind aber geblieben. Als Hauptgrundlage für meine Beschreibung wähle ich die Durchführung vom 18. bis 30. November 1996 an der Ecole d'Humanité in Goldern-Hasliberg, weil ich damals meine ganze Zeit dem Lehrstück widmen und so den Verlauf gut dokumentieren konnte. Allerdings stand mir nur eine kleine Schülergruppe zur Verfügung. Auf die Erfahrungen und Weiterentwicklungen des Lehrstücks am Gymnasium Bern-Neufeld werde ich zwischendurch und am Schluss hinweisen.

Für die Inszenierung des Lehrstücks an der Ecole d'Humanité in Goldern-Hasliberg standen etwa 15 Stunden oder umgerechnet 20 Lektionen (à 45 Minuten) zur Verfügung, die sich wie oben dargestellt auf die Akte verteilten.

Der zeitliche Ablauf über die zwei Wochen präsentiert sich folgendermassen:

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag
Auftakt **I. Akt:** Würfel, Kugel und Verwandte	Prisma und Pyramide		Annäherung an π in Babylon und Ägypten	Formel zur Annäherung von π	Polyederaufgaben besprechen
Exposition des Lehrstücks		**III. Akt:** Der Kreis in der Ebene. π, was ist das?			
II. Akt: Im Eckenland					

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag
Rekursion zur Annäherung von π	**IV. Akt:** Im Rundland: Zylinder und Kugel	Sätze über Kegel nach Archimedes	Heuristisch zum Kugelvolumen. Berechnung der Kugeloberfläche.	Berechnung des Kugelvolumens. Zusammenhänge. Archimedes' Grab.	**Abschluss** und Abschied
Intervall-schachtelung für π. Histor. Überblick					

Für mich verbinden sich an der Ecole d'Humanité zwei Seiten: Im Rahmen meiner TZI-Ausbildung (themenzentrierte Interaktion nach Ruth C. Cohn) lernte ich 1984 die Ecole, einige ihrer Lehrer und deren Unterrichtsstil kennen. Im Frühjahr 1996 besuchte ich die Wagenscheintagung, die in den Räumlichkeiten der Ecole stattfand, dort wo der Nachlass von Martin Wagenschein betreut wird. Bei dieser Gelegenheit knüpfte ich diejenigen Kontakte, die mir dazu verhalfen, ein halbes Jahr später dort zu unterrichten.
Während vierzehn Tagen im November versuche ich also im Erdgeschoss des Wagenscheinhauses diese beiden Seiten, TZI und Wagenscheindidaktik, möglichst optimal zu verbinden. Für mein Lehrstück „Vom Würfel zur Kugel" ist mir eine Gruppe von 6 Schülerinnen und Schülern aus dem 10. Schuljahr angesagt. Es ist ein Mathematikkurs, der in der ersten Morgensequenz von 75 Minuten Länge, d.h. täglich von 08.10 bis 09.25 Uhr stattfindet. Für zwei Wochen darf ich diesen Kurs führen, wobei wir am ersten Tag sogar die zwei folgenden, je knapp stündigen Sequenzen bis zum Mittagessen anhängen dürfen.

Am Vorabend besuche ich den zugeteilten Unterrichtsraum: er misst gute fünf auf fünf Meter und ist ausgerüstet mit Tischen und Stühlen. Hinten und auf der einen Seite gibt es je eine grosse Fensterfront mit viel Lichteinfall, vorn und auf der andern Seite befinden sich Wandtafeln. Dort stelle ich zwei gleich hohe Tische mit kleinem Zwischenraum bereit und klebe darauf schräg eine Bahn Packpapier. Auf drei Seiten stehen je zwei bis drei Stühle. Am frühen Montagmorgen warte ich im Unterrichtszimmer gespannt auf die Jugendlichen. Es erscheinen nur gerade vier von ihnen: Anna, Muriel, Christof und Silvan. Felix ist momentan krank und Sandor absolviert diese Woche auswärts eine Schnupperlehre. Das sind offenbar die Realitäten.

Auftakt

In einer lockeren ersten Runde mit dem Thema „Wer bin ich und warum bin ich hier in diesem Kurs?“, habe ich die Möglichkeit, etwas über mein Hiersein zu erzählen und erfahre, dass die Anwesenden lebendig und motiviert sind. Muriel und Christof beginnen vielleicht eine Lehre, Anna und Silvan streben die Matura an. Von Anfang an spüre ich viel Wohlwollen und Offenheit.

Didaktische Anmerkungen: *Als günstig hat es sich in Bern erwiesen, bereits zu diesem Zeitpunkt nach Archimedes zu fragen. Kaum jemand hat mehr als den Namen gehört. Um in die Zeit der mathematischen Auseinandersetzung mit den Körpern einzuführen und erste Bekanntschaft mit Archimedes und dem Ort seines Wirkens zu vermitteln, erzähle ich die Geschichte der Sandrechnung, entstanden im Gespräch von König Gelon mit Archimedes am Sandstrand von Syrakus. Der ganze damalige Kosmos erscheint vor uns als Kugel, gefüllt mit Sandkörnern, deren Anzahl Archimedes abschätzte, indem er den Zahlbereich weit über das damals Gewohnte hinaus erweiterte. Dass sich Archimedes nicht nur mit astronomischen Dimensionen befasste, sondern auch mit handfesten irdischen Problemen, wird im Folgenden klar*.

I. Akt: Exposition des Lehrstücks: Würfel, Kugel und Verwandte

Herumgesprochen hat sich bereits, dass es beim Lehrstück um Körper geht. Die Tischanordnung weckt Neugier. Ich verteile Tonklumpen zum Kneten und leite damit über in den ersten Akt, der uns *Überblick und Handlungsweg* des Lehrstücks zeigen soll. „Welches ist der am einfachsten zu formende Körper?“ Einigkeit herrscht, es ist die Kugel, die da und dort bereits in der Hand liegt. „Gibt es ein Gegenteil der Kugel?“ Diese Frage verwirrt, regt an. „Etwas Kantiges“, „Nichts Rundes“, „Das Loch im Emmentaler“ – „Welcher Körper ist vom rechnerischen Standpunkt aus am besten bekannt?“ – „Der Würfel“ – Die Kugeln klatschen auf den Tisch, nach und nach entstehen würfelähnliche Gebilde. Es scheint bedeutend schwieriger zu sein, einen schönen Würfel zu formen als eine gelungene Kugel. Kugel und Würfel liegen auf dem Tisch, zwei Pole, zwei Gegensätze. Die Kugel primär Produkt von praktischer Intelligenz, Handintelligenz, Ausdruck der Real-Entwicklung. Der Würfel primär Produkt der Kopfintelligenz, entstanden aus dem geistigen Entwicklungsprozess. „Durch welche Eigenschaften lässt sich der Unterschied zwischen Kugel und Würfel charakterisieren?“ – „Rund, weich, gleichmässig, ausgeglichen, weiblich, mütterlich, ... die Kugel; eckig, kantig, hart, unausgeglichen, aggressiv, männlich, väterlich ... der Würfel.“ Christof ergänzt im gleichen Atemzug, dass ihm die Kugel näher stehe.

„Gehört einer der Körper eher in die rechte, einer eher in die linke Hand?“. Zwei Spontanmeldungen legen die Kugel in die linke, den Würfel in die rechte Hand. Anna: „Die Kugel ist leichter zu halten in der Hand; die geschicktere rechte Hand brauche ich für den Würfel.“ Interessant ist der Hinweis auf die Hirnhälften: die linke Hirnhälfte steuert die rationalen, analytischen Prozesse und ist verbunden mit der rechten Körperseite; die rechte Hirnhälfte mit ganzheitlichem, synthetischem Denken korrespondiert zur linken Körperseite. „Wir haben jetzt die zwei Pole, Kugel und Würfel, Mutter und Vater. Welche Kinder und Verwandten gibt es?“ – Nach und nach entstehen Zylinder, Quader, Prisma, Tetraeder, Pyramide, Spat, Kegel, Oktaeder, Doppeltetraeder. („Ist das auch ein Hexaeder?“). „Was bedeutet „Tetra-eder“ – Das Tetrapack ist kaum mehr bekannt, was ein Tetraplegiker ist, weiss auch niemand. Mit der Zunahme der Körper beginnen gleichzeitig erste Begriffsklärungen.

„In welcher Beziehung stehen die Körper zueinander? Wie lässt sich diese Beziehung durch ihre Position ausdrücken?“ Die Körper werden angeordnet, wieder verschoben, lange herrscht Unzufriedenheit. Schliesslich werden das Spitze bei Pyramide und Kegel sowie das Runde als etwas Besonderes erkannt und in der Anordnung ausgedrückt. Insbesondere trennt jetzt der Graben zwischen den beiden Tischen die Körper mit runden Elementen von den andern. Die Begriffe „Eckenland“ und „Rundland“ werden für die verschiedenen Bereiche gewählt. Der Übergang vom Eckigen zum Runden wird mit dem Kreis und mit π zu tun haben. Damit ergeben sich der Titel „Vom Würfel zur Kugel“ und die weitere Struktur für das Lehrstück.

I. Akt: Exposition des Lehrstücks; Würfel, Kugel und Verwandte.
II. Akt: Im Eckenland: Vom Würfel zu Quader, Prisma und Pyramide
III. Akt: Der Kreis in der Ebene als Steg über die Kluft
IV. Akt: Im Rundland: Über Zylinder und Kegel zur Kugel

Alle sind wir erstaunt, dass die erste Sequenz schon zu Ende ist.

Didaktische Anmerkungen: *Der Einstieg mit Ton ist sehr beliebt und hat sich bewährt. Das Formen und Greifen unterstützt das Begreifen. Jederzeit später besteht die Möglichkeit, darauf zurückzugreifen, zu schneiden oder umzuformen, den Prozess zu veranschaulichen und* *den Standort zu bestimmen. Als Resultat der Umformungen werden ja Formeln stehen, Kurzschriften die den geistigen Prozess beinhalten. Ab und zu entsteht noch ein zweiter Denkweg mit der Idee, vom Würfel wegzuschneiden, bis die Inkugel übrig bleibt. Verfolgen wir diesen Weg, so stossen wir bei der Berechnung sehr rasch auf grösste Schwierigkeiten. Mit dem Hinweis auf die historische Entwicklung propagiere ich den oben skizzierten Weg.*

In einer grossen Gruppe sind immer einige Schülerinnen oder Schüler, die lieber in einem äusseren Kreis sitzen und sich nicht die Hände schmutzig machen, sich aber jederzeit in die Diskussion einschalten können. Hilfreich ist es für alle, wenn 2 bis 3 Schüler sich dem Protokollieren des Dialogs widmen.

Ein Kernanliegen lässt sich kurz und bündig formulieren, es ist das Suchen nach einer Antwort auf die Frage: „In welcher Beziehung stehen Kreis und umbeschriebenes Quadrat, beziehungsweise Kugel und umbeschriebener Würfel?“

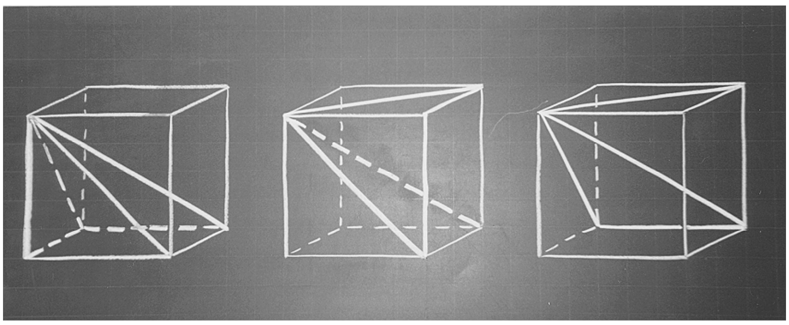
Zum Glück dürfen wir nach der verdienten halbstündigen Pause eine zweite Sequenz anhängen. Das Festhalten des Erlebten und Diskutierten drängt sich auf. Ich verteile Mäppchen, in denen wir die Notizen und Arbeitsblätter zusammenfassen.

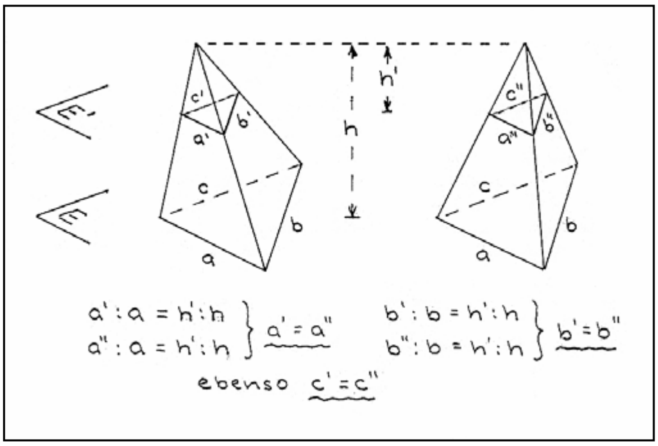
Nach kurzer Repetition des Wichtigsten dauert es eine halbe Stunde, bis alle notiert haben. Fragen nach Namen tauchen auf: „Was ist ein Kegel, ein Prisma?“. Die Schnelleren sind bereits daran, sich mit den verschiedenen Körpernamen auseinanderzusetzen, die ich wohlweislich auf einem Blatt zusammengestellt bereithalte. Wieder im Plenum tauchen wir nochmals ins Griechische: Hexa-, Tetra-, Okta-, Penta-, Poly- ..., -gon, -eder.

Platons Theorie der Ideen sowie die platonischen Körper, die von früher bekannt sind, werden kurz ins Zentrum gerückt. In der Natur finden wir häufig kugelförmige Gebilde. „Ist der Würfel nur eine Erfindung unseres Kopfes?“ Leider habe ich kein würfelförmiges Mineral zur Hand. – Nur allzu rasch ertönt der Gong mit seinem angenehmen Klang.

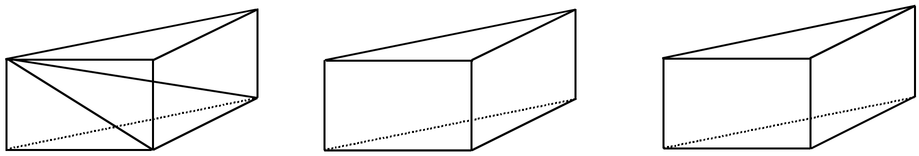
II. Akt: Im Eckenland: Vom Würfel zu Quader, Prisma und Pyramide

In der **dritten Stunde** wollen wir uns den Berechnungen im Eckenland widmen. Da ich im Stück die Schwerpunkte in den von Archimedes geleisteten Bereichen legen will und die meisten Körper des Eckenlandes bereits behandelt sind, gehe ich hier nicht allzu sehr ins Detail, bleibe bei der Anschauung. Die Berechnung von Würfel, Quader, Spat und Prisma sind bekannt und können leicht rekapituliert und begründet werden. Die Pyramide ist schon anspruchsvoller. Silvan erinnert sich: „Wird die Spitze einer quadratischen Pyramide senkrecht über eine Ecke ‚rübergezogen’, so ergibt sich ein Drittel eines Würfels.“ Der berechtigte Einwand folgt auf dem Fuss: „Dies ist bestenfalls möglich, wenn die Höhe gleich gross ist wie die Grundkante.“ Und Silvan weiter: „Der Würfel kann in drei kongruente Pyramiden zerlegt werden.“ „Das geht nicht!“, ist die spontane Reaktion der andern. Ich reiche Silvan einen Lehmwürfel und das Messer. Auf Anhieb will ihm die Teilung nicht gelingen. Inzwischen habe ich drei Würfel an die Tafel gezeichnet. „Wer kann eine derartige Pyramide zeichnen?“ Nach und nach werden alle drei skizziert und aufgrund dieser Ansicht aus dem Ton ausgeschnitten.





Bemängelt wird, dass damit erst ein Spezialfall geklärt ist. Da von „Spitze verschieben“ und „Schnittflächen“ die Rede ist, will ich ausholen und wir zeigen, dass die Schnittflächen bei zwei Tetraedern mit kongruenter Grundfläche und gleicher Höhe kongruent sind. Ohne allzu lange Diskussion wird – unter Vorwegnahme der Archimedischen Idee, ganz dünne Scheiben zu schneiden – gefolgert, dass zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe volumengleich sind, wie das Euklid, allerdings auf ganz andere Art, bewiesen hat. Um den allgemeinen Fall zu erhalten, bitte ich die Schüler, in ein vorgegebenes Prisma drei Pyramiden einzuzeichnen, so dass je zwei von ihnen gleiche Grundfläche und gleiche zugehörige Höhe besitzen. Da der Auftrag unklar scheint und die Zeit fortgeschritten ist, zeichne ich an der Tafel eine erste Pyramide, genauer ein Tetraeder, ein.



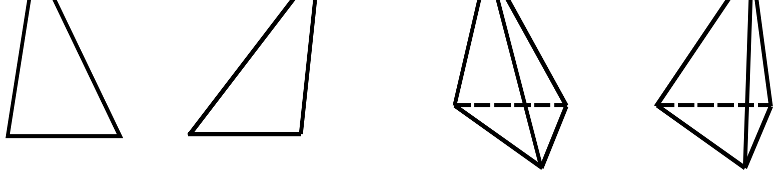
Mit dieser Hilfe erscheinen dann die andern beiden Pyramiden rasch an der Tafel und können gerade noch auf das vorbereitete Blatt übertragen werden. Die gleichen Grundflächen G mit den zugehörigen Höhen h lassen sich leicht finden. Da sich beim Prisma das Volumen wie bei Quader und Spat berechnet als Grundfläche G mal Höhe h und sich das Prisma in drei volumengleiche Tetraeder zerlegen lässt, folgt $V_T = G \cdot h / 3$ für das Tetraedervolumen V_T. Bereits ist die letzte Stunde unseres Vormittags vorbei, ohne dass wir die wesentlichen Erkenntnisse notiert hätten. Als Auftrag auf den folgenden Tag bitte ich die Schülerinnen, einige Körper aus ihrer Umgebung mitzubringen.

Die Sitzung vom **Dienstag** soll nochmals ganz dem Eckenland gewidmet sein. Ausser mir hat niemand Körper mitgebracht und so verzichte ich darauf, meine bei den Tonkörpern als Ergänzung hinzulegen. Wir gehen den Prozess des Vortages nochmals durch und formulieren zwei Sätze:

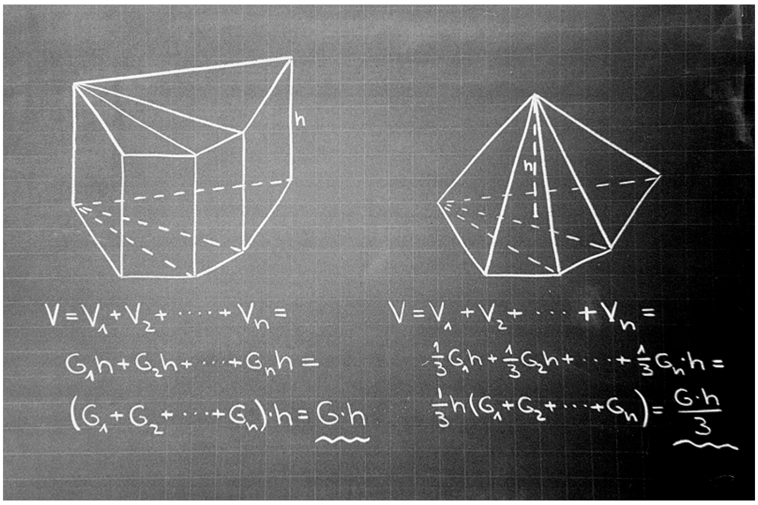
– „Zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind volumengleich.“
– „Das Volumen des Tetraeders berechnet sich als Grundfläche mal Höhe durch drei.“

Analoge Sätze kennen wir für Dreiecke in der Ebene:

– „Zwei Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe sind flächengleich.“
– „Die Fläche des Dreiecks berechnet sich als Grundseite mal Höhe durch zwei.“



Wie können wir jetzt das Volumen V_P einer beliebigen Pyramide erhalten? Wie für den allgemeinen Fall des Prismas lässt sich die Grundfläche jeder beliebigen Pyramide in Dreiecke zerlegen. So ergibt sich die Verallgemeinerung sehr schön. Der Prozess kann damit individuell nochmals durchdacht und anschliessend schriftlich festgehalten werden. In der Zwischenzeit notiere ich an der Tafel vier Aufgaben über Körper im Würfel:



1. Berechne Oberfläche und Volumen einer der drei kongruenten Pyramiden des Würfels.
2. Berechne Oberfläche und Volumen des regelmässigen Tetraeders, dessen Kanten Diagonalen von Seitenflächen des Würfels sind.
3. Berechne Oberfläche und Volumen des regelmässigen Oktaeders, das entsteht, indem die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen verbunden werden.
4. Berechne Oberfläche und Volumen des Kuboktaeders, das entsteht durch Verbindung der Mittelpunkte benachbarter Seitenkanten des Würfels.

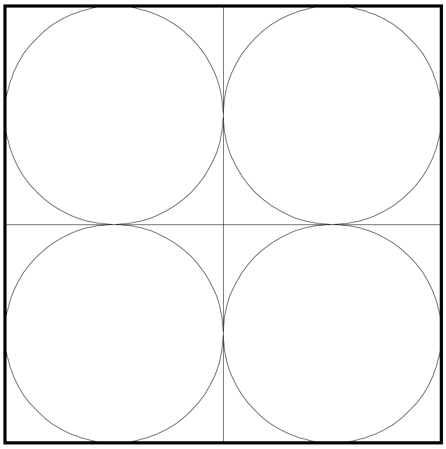
Bereits bei der ersten Aufgabe merke ich, dass die einzelnen Mühe haben, selbständig vorzugehen und dann auch noch algebraisch richtig umzuformen. So lösen wir gemeinsam. Anna ist am spontansten, wagt sich vor und löst mit Hilfe der andern. Wenn nur die Algebra nicht wäre! Von einem Würfel hat sie am Vortag schon vier Pyramiden abgeschnitten, was ihr jetzt hilft, das Volumen des zweiten Körpers, des regulären Tetraeders, zu bestimmen. Weiter kommen wir nicht, da die Stunde bereits um ist. Als Aufgabe auf morgen schlage ich die Berechnung der Oberfläche des Tetraeders vor. Mehr ist offenbar nicht möglich.

Am **Mittwoch** findet wegen einer Konferenz eine verkürzte Sitzung statt. Silvan und Muriel haben auf heute gemeinsam versucht, die Oberfläche des Tetraeders im Würfel mit Kantenlänge a zu bestimmen und haben dabei etwas mit Wurzel aus 7/4 bekommen. Das müssen wir uns ansehen. Wir repetieren den Flächeninhalt $F_\Delta = \sqrt{3} \cdot s^2/4$ des gleichseitigen Dreiecks mit Seite s und ersetzen s durch $a \cdot \sqrt{2}$, da dies gleichzeitig Diagonale der Seitenflächen des Würfels ist. So erhalten wir für die Oberfläche $O = 4 \cdot F_\Delta = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$. „Ein schönes Resultat“, findet Anna. Für die weiteren Übungen überlasse ich kopierte Blätter samt Lösungen. Bis Samstag sei es möglich, sich damit zu befassen, wird mir versichert. Auf Wunsch von Muriel stellen wir noch gemeinsam an der Tafel die bisherigen Formeln zusammen.

Didaktische Anmerkungen: *Für die Überlegungen im Eckenland wollte ich nicht sehr viel Zeit investieren, die wesentlichen Ideen lieber von der Anschauung her unterstützen. Da die Schnittflächen bei den Pyramiden erwähnt wurden, ging ich darauf ein. Wenn schon, hätte ich lieber historisch korrekt den Beweis des Euklid (vgl. Elemente Buch XII, §§ 3-5) mit dem Ausschöpfen der Pyramiden durch Spate diskutiert. Laufend zeigt sich, wie wichtig algebraische Umformungen und der sichere Umgang mit Wurzeln sind. Leider scheitern viele Schülerinnen und Schüler immer wieder daran, können die guten Ideen nicht umsetzen. Ins Zentrum stelle ich wo möglich Analogien und Zusammenhänge, sowie sich wiederholende Denkwege. Der Prozess wird vertrauter und übersichtlicher, weniger Wissen ist nötig, um das Wesentliche zu verstehen. Damit haben wir genügend Vertrautheit mit den Polyedern, den Körpern im Eckenland, erreicht; wir kennen die wichtigsten Namen und Zusammenhänge, können Volumina und Oberflächen einfachster Körper berechnen.*

III. Akt: Der Kreis in der Ebene als Steg über die Kluft

Somit sind wir bereit, mit dem 3. Akt einen Schritt in Richtung Rundland zu wagen. Um ans Runde zu kommen, erweist es sich als notwendig, aus dem Raum in die Ebene hinunter zu steigen, und den **Übergang vom Geraden zum Runden** vorerst im Zweidimensionalen zu studieren. Da π „bekannt" ist, beginnen wir mit der Bedeutung von π. Silvan: „π macht alles rund." Christof: „π ist eine Zahl ohne Ende." Muriel: „Genau, sie rechnen das immer wieder mal aus, eine ganze Zeitung voll." – Ich: „Und wozu brauchen wir π?" Christof: „Um Kreise, runde Formen zu berechnen. Man muss es eingeben in den Rechner, dann spuckt er eine Zahl aus ... 3.14 und so. – Das ist dann der ungefähre Flächeninhalt." Ich: „Ja, aber ..." Christof: „Es hat etwas mit Viereck, mit Quadrat und einem Kreis zu tun, der alle Seiten schneidet ... irgend so etwas." Ich: „Was für eine Figur soll ich zeichnen?" Christof: „Zeichne ein Quadrat, dann einen Kreis, der alle Seiten berührt." Anna kommentiert: „Den Inkreis." Ich zeichne an der Tafel ein Quadrat mit einbeschriebenem Kreis. Ich: „Und was hat das mit π zu tun?" Christof: „Weiss ich nicht mehr so genau, irgend etwas." Ich: „π, hast Du gesagt, ist eine Zahl 3.14 und so." Ich notiere an die Tafel: π = 3.14...



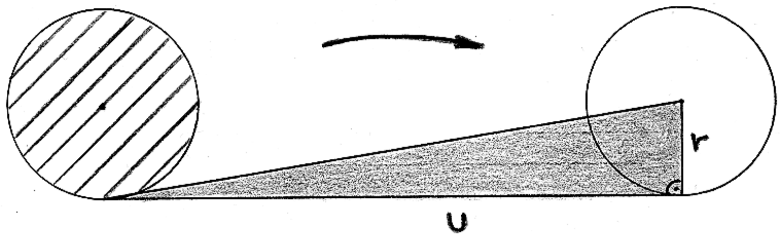
Anna ganz aufgeregt: „Ich weiss etwas. Der Durchmesser des Kreises ist ja gleich gross wie diese Seiten des Quadrats und der Radius ist eine halbe Seite. – In ein solches Quadrat kann man jetzt vier Quadrate setzen mit halblangen Seiten." Ich zeichne eine neue Figur. Anna: „Und im Kreis drin haben jetzt vier Kreise mit halbem Radius Platz, natürlich nicht vollständig, aber vom Flächeninhalt her. – Vier von denen, logischerweise." Ich: „Was heisst da ‚logischerweise'?" Anna: „Weil es ja auch vier Vierecke hat. Es hat ja vier Quadrate im Quadrat und also auch vier Kreise im Kreis. – Ich denke, das hat nichts damit zu tun." Damit verabschiedet Anna ihren Ansatz. Christof bezieht sich wieder auf die erste Figur: „Nun ist es so; das Viereck dort oben hat 3.14... mal im Kreis drin Platz." Muriel für einmal spontan: „Ja, ja, genau. Das Viereck ist ja grösser als der Kreis." Christof wiederholt seine Aussage; er ist offenbar seiner Sache sicher. Ich: „Welche Formel drückt das aus?" Muriel: „π mal Radius im Quadrat. Das ist die Fläche vom Kreis." Ich notiere: $F = \pi \cdot r^2$. „Das wäre mal eine Interpretation dieser Formel. – Habt Ihr π sonst noch gebraucht?" Christof: „Ja, für den Umfang. – Der Umfang beträgt π. Umfang gleich Durchmesser mal π." Ich: „Können wir das auch illustrieren?" Christof: „Der Umfang des kleinen Quadrätleins hat 3.14 mal auf dem Umfang des Kreises Platz." – Ich wiederhole fragend: „Der Umfang dieses kleinen Quadrätleins?" Christof ist verwirrt: „Ja, ja, – nein, das kann nicht sein. – Der Durchmesser ist ja gleich wie die Seitenlänge des grossen Quadrats. – Der Umfang ist 3.14 mal der Durchmesser; das heisst, der Durchmesser hat 3.14 mal auf dem Umfang des Kreises Platz." – Ich frage: „Ist es nicht erstaunlich, dass ein gut Dreifaches des Durchmessers den Kreisumfang und ein gut Dreifaches des Quadrats über dem Radius die Kreisfläche ergibt? Und das soll genau dasselbe Vielfache sein?" – Muriel: „Beide Mal dasselbe; beide Male derselbe Rest." Christof: „Zufall!" Anna: „Eines der Gesetze, die wir nicht verstehen." Ich: „Lasst uns sehen, ob wir das verstehen können. – Angenommen, obige beiden Formeln sind richtig, so bedeutet das, wenn wir beide Formeln nach π auflösen:

$$\pi = F / r^2 \quad \text{und} \quad \pi = U / 2r \quad \text{, woraus folgt} \quad F / r^2 = U / 2r$$

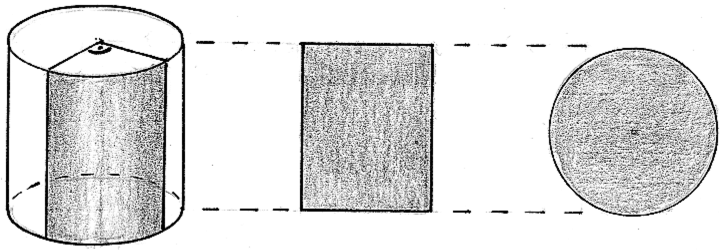
Wir haben einen **direkten Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Kreisfläche** erhalten. Zur Verdeutlichung multiplizieren wir mit r^2 und kürzen mit r.

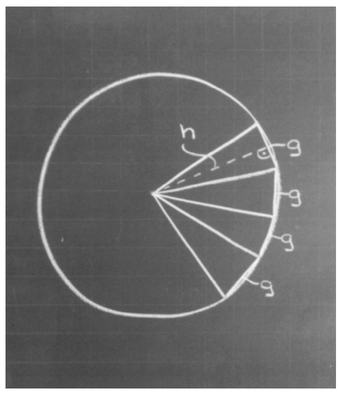
$$F = (r^2 \cdot U) / 2r = (U \cdot r) / 2$$

„Woran erinnert Euch dieser Ausdruck $F = (U \cdot r)/2$?“ – „Ach ja, an die Formel für eine Dreiecksfläche: $(g \cdot h)/2$.“ „Was für ein Dreieck ergibt das?“ Wir zeichnen das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten r und U. Archimedes, der nicht unseren heutigen Formalismus zur Verfügung hatte, formulierte diesen Zusammenhang im folgenden Satz: „Jeder Kreis ist gleich einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem die eine Seite beim rechten Winkel gleich dem Radius und die andere gleich dem Umfang ist.“ Durch Abrollen eines Zylinders können wir die Länge U „erzeugen“ und das Dreieck zeichnen.



Der geniale Leonardo da Vinci (1452 bis 1519) schlug vor, einen geraden Kreiszylinder mit Radius r und Höhe r/2 in der Ebene einmal abzurollen. Der entstehende schmale rechteckige Teppich hat dieselbe Fläche wie der Kreis. Denselben Flächeninhalt erhalten wir auch, wenn wir vom geraden Zylinder mit Höhe 2r - wir werden diesem Zylinder später wieder begegnen - ein Viertel des Mantels abrollen.





Natürlich entspricht dieses Abrollen keiner Konstruktion im klassischen, euklidischen Sinne, die nur Zirkel und Lineal zulässt. Die Quadratur des Kreises, d. h. die Verwandlung der Kreisfläche in eine Quadratfläche, ist damit nicht gelöst. Ich: „Wir wollen sehen, ob die oben erwähnte Formel einleuchtend ist. Wie würdet Ihr versuchen, die Kreisfläche zu bestimmen, wenn Euch π nicht bekannt wäre?“ Langes Nachdenken. Anna wagt sich wieder einmal vor, kommt an die Tafel, zeichnet einen Kreis: „Wir könnten ja kleine Stücke machen, die alle fast Dreiecke sind.“ Sie zeichnet kleine Schnitze. „Vielleicht Winkel von 10°.“ – Schon vermute ich, dass sie die Trigonometrie zu Hilfe nehmen will. – Aber nein, sie unterteilt weiter, bis Muriel interveniert: „Wir wissen schon, wie Du es meinst.“ Anna: „Und so können wir die Fläche berechnen.“ – „Wie?“ Nach einigem Hin und Her steht dann eine Formel an der Tafel: $F_n = (g \cdot h)/2 \cdot n$ für die Fläche des n-Ecks. Ich frage nach: „Ist das die Kreisfläche?“ Anna: „Nein, aber jetzt machen wir die Stücke immer kleiner.“ Christof voreilig: „Alles strebt gegen Null.“ – „Wirklich?“ – Schliesslich wird er präziser: „h strebt gegen r, g strebt gegen 0 und n strebt gegen unendlich.“ Und jetzt? Die Frage nach dem Produkt $g \cdot n$ erhellt den Rest. Dies ist der Vielecksumfang und dieser strebt gegen den Kreisumfang. Und wenn wir die Einteilung immer feiner machen, so strebt auch die Fläche des

Vielecks beliebig nahe gegen die Kreisfläche, ist praktisch nicht mehr von ihr zu unterscheiden. Wir dürfen demzufolge schreiben $F = (U \cdot r)/2$. Silvan erkennt sofort, dass dies ja obige Formel ist und zeigt auch, dass wir den Weg zurück überlegen können und damit die vorher postulierte Proportion erhalten.

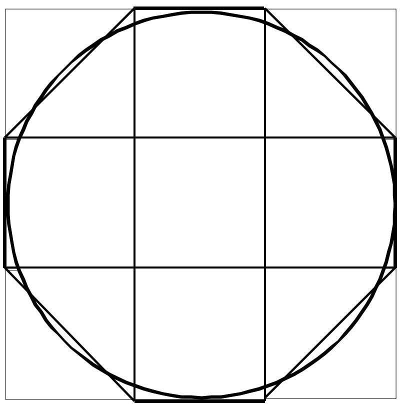
$$F = (U \cdot r)/2 \quad \text{Division durch } r^2 \text{ führt auf} \quad F / r^2 = U / 2r = U / d.$$

Somit haben wir eingesehen, warum bei der Umfangberechnung und bei der Kreisberechnung *derselbe* Faktor, er wird mit π bezeichnet, vorkommen muss. Eine der erstaunlichsten Erkenntnisse der Mathematik überhaupt.

$$F = \pi \cdot r^2 \quad \text{und} \quad U = \pi \cdot d.$$

Am **Donnerstag** erscheint erstmals auch Felix, der krank war. Wir nutzen die Gelegenheit, um zu rekapitulieren, die wichtigsten Zusammenhänge und Erkenntnisse hervorzuheben und zu notieren. So bleibt etwa noch eine halbe Stunde für die Annäherung an diese Grösse π. Wir sitzen wieder am grossen Tisch und ich lese einen Text vor: „Und er machte das gegossene Meer (gemeint ist eine grosse, runde Schale, die für die Waschungen der Priester bestimmt war) zehn Ellen weit von einem Rande bis zum andern, ringsum rund und fünf Ellen hoch; und eine Schnur von dreissig Ellen Länge konnte es rings umspannen.“ Dass der Satz aus der Bibel stammt, ist allen klar. Die Vermutungen gehen von der Genesis bis zu den Korintherbriefen. Der Text, entstanden rund 1000 vor Chr., steht im alten Testament (Könige I, 7;23) und beschreibt die Ausgestaltung des Tempels Salomos. Es wird klar, dass hier von einem Verhältnis U/d gleich 3 die Rede ist. Eine nicht eben gute Annäherung. Als nächstes will ich Näherungen der Ägypter erwähnen. Zu diesem Zweck giesse ich auf ein

Kuchenblech feinen Sand, ein Laptop der Antike. Erstaunen zeigt sich auf den Gesichtern. Wir wissen, dass Archimedes viele seiner Erkenntnisse anhand von Zeichnungen in der Asche bei der Feuerstelle und im Sand auf einem Brett oder am Strand gewonnen hat. Dem römischen Legionär soll er zugerufen haben: „Noli turbare circulos meos“ (vielleicht sagte er es auf griechisch?) – „Zerstöre mir meine Kreise nicht“ – , bevor er im Alter von 75 Jahren bei der Eroberung von Syrakus durch die Römer erstochen wurde.



Ich zeichne einen Kreis und umschliessend ein Quadrat, das ich in 9 gleiche Teilquadrate unterteile. Die Diagonalen in den Eckquadraten erzeugen ein Achteck, dessen Fläche F_8 die Kreisfläche annähert. Wir finden:

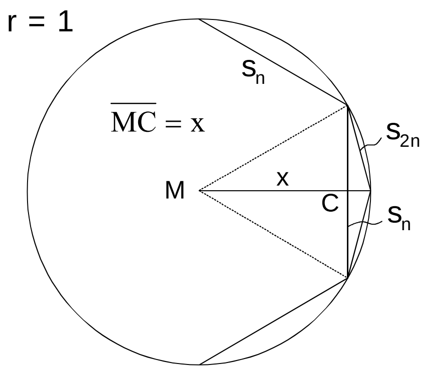
$F_8 = 7 \cdot (d/3)^2 = 28/9 \cdot r^2 = 3.111... r^2$

Jetzt bitte ich die Schülergruppe, den einfachen Zusammenhang aufzuschreiben. Eigentlich möchte ich die Sandschrift löschen, aber die Schüler und Schülerinnen protestieren, sie könnten es sonst nicht notieren. (Meine heimliche Frage: Haben sie wirklich begriffen, was wir gemacht haben?)

Im Papyrus Rhind (500 v. Chr.), dem ältesten Rechenbuch der Welt, ist sogar noch eine Verbesserung zu $(16/9)^2$ vorgenommen worden. „Verkürze den Durchmesser des Kreises um 1/9 seiner Länge und errichte über der so verkürzten Strecke das Quadrat." Eine mögliche Erklärung dazu verteile ich auf einem Blatt zum Studieren. Soviel für heute.

Über Nacht auf **Freitag** habe ich einen sehr schönen, fast würfelförmigen Pyritkristall ausgeliehen und bringe ihn mit. Der Kristall löst Staunen aus. Ob dieser wirklich echt sei? Ob er abgeschnitten sei? Wie so ein Ding überhaupt wachsen könne? Zwar wird festgestellt, dass gegenüber liegende Kanten nicht genau parallel und nicht alle Kanten genau gleich lang sind, aber die Bewunderung bleibt. Es gibt offenbar in der Natur würfelförmige Gebilde. Anna besitzt eine Pyritsonne und schildert eindrücklich, wie diese aussieht.

Zum heutigen Thema: Wie können wir π noch besser bestimmen? Die Annäherung von innen durch Vielecke und die Verfeinerung durch Verdoppelung der Eckenzahl, das wurde ja schon vor zwei Tagen von Anna erklärt. Aber wie können wir dieses Verfahren durchführen? Ich erläutere den mühsamen Weg, den Archimedes gehen musste; wie er mit langen Bruchrechnungen die Seite s_{12} des regelmässigen Zwölfecks aus der Sechseckseite s_6, dann daraus s_{24}, die Seite des 24-Ecks usw. bis zum 96-Eck angenähert hat. Mit damals bekannten mathematischen Sätzen und unseren heutigen Mitteln der Algebra und der Wurzelschreibweise können wir ein Verfahren finden, mit dem sich *formelmässig* die Seitenlänge s_{2n} des2n-Ecks aus der Seitenlänge s_n des n-Ecks ausdrücken lässt. Ein kurzer Arbeitsauftrag soll der Gruppe den Weg zur Formel weisen. Mit viel Zeit und etwas Hilfe gelingt es. Zudem ergeben sich Formeln für den Umfang U_n des einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks und die Fläche F_{2n} des dem Kreis einbeschriebenen regelmässigen 2n-Ecks.



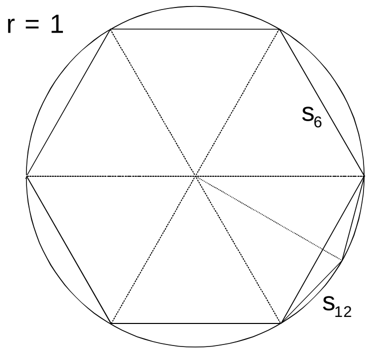
Der Auftrag: Verwende zweimal den Satz von Pythagoras und eliminiere die Grösse x!

Wir erhalten:

$$\boxed{s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}}$$

$U_n = n \cdot s_n \qquad F_{2n} = n \cdot s_n / 2$

Auch wer diese Formel nicht im Detail herleiten mag, kann ihre Bedeutung verstehen lernen und die Folgerungen geniessen. Im Kreis mit Radius r = 1 zeichnen wir das regelmässige 6-Eck, bestehend aus 6 gleichseitigen Dreiecken, also ist $s_6 = 1$. Das wiederholte Einsetzen in die hergeleitete Formel ist nochmals eine gute Algebraübung. (Noch schöner werden die Wurzelausdrücke, wenn wir vom regelmässigen Viereck mit Seitenlänge $s_4 = \sqrt{2}$ ausgehen.)



$$s_6 = 1$$
$$s_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$s_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
$$s_{96} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

Und wie berechnen sich diese Wurzelausdrücke? Mit vielen Klammern? Natürlich wollen alle auch gleich den kompliziertesten Ausdruck berechnen. Von innen beginnen, eine geniale Idee! Bis zum Schluss der Stunde haben wir dank dem Speicher des Taschenrechners doch einige Umfänge und Flächen berechnet.

$s_6 = 1$	$U_6 = 6$	
$s_{12} = 0.517638$	$U_{12} = 6.21166$	$F_{12} = 3.00000$
$s_{24} = 0.261052$	$U_{24} = 6.26525$	$F_{24} = 3.10583$
$s_{48} = 0.130806$	$U_{48} = 6.27869$	$F_{48} = 3.13263$
$s_{96} = 0.065438$	$U_{96} = 6.28206$	$F_{96} = 3.13935$

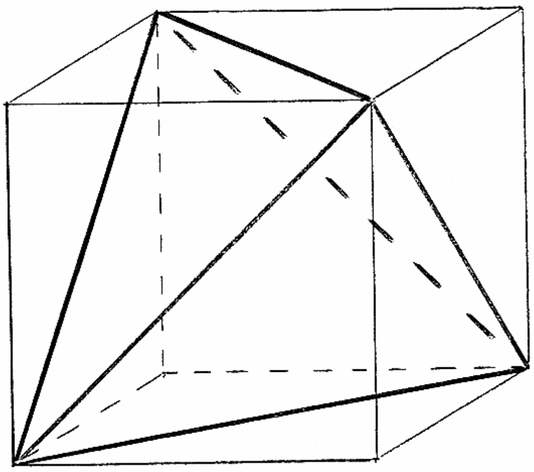
Archimedes hat mit den einfachen Mitteln, die damals zur Verfügung standen, ebenfalls bis zum 96-Eck gerechnet und gefunden:

$$3 + 10/71 < \pi.$$

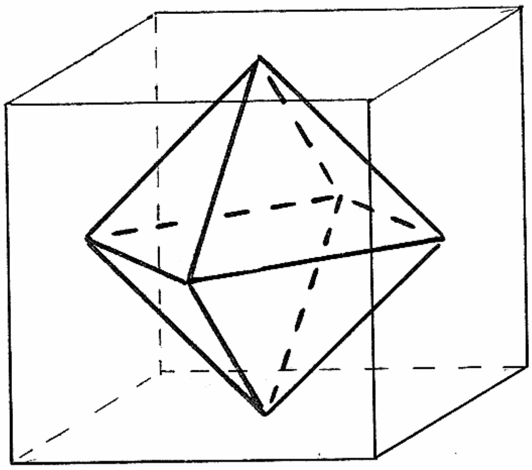
Durch das Morgensingen am **Samstag** wird die nächste Sitzung stark verkürzt. Wir benötigen die ganze Zeit zur Besprechung der Polyeder–Aufgaben (siehe folgende Seite).

Bereits ist **Montag**, die zweite Woche beginnt. Draussen liegt Schnee. Es ist Schnee, der die Herzen und Köpfe füllt und blockiert. Entsprechend sind keine Aufgaben erledigt. Sandor, der sechste Schüler kreuzt auf. Er ist begeistert über seine Schnupperlehre als Werkzeugmechaniker und über seine Lehrstelle, die er sich dabei gesichert hat. Da am Wochenende alle im Freien waren, frage ich nach: „Habt Ihr gestern den Mond gesehen?" Es war soeben Vollmond. – Anna: „Ja, er hatte einen grossen Hof." – Christof: „Das Spiegelbild der Sonne." – „Wenn Ihr den Mond anschaut: erblickt Ihr eher eine Kugel oder eine Scheibe?" – „Eine Scheibe." – „Obwohl Ihr wisst, dass der Mond eine Kugel ist. Wie viel grösser ist die beleuchtete Kugelfläche als die von uns wahrgenommene Scheibenfläche?" – Christof: „Das π-fache." – Anna: „Das kann nicht sein, das 1.5-fache der Kreisfläche?" – „Das $\pi/2$-fache?" – Ich: „Das könnte wohl sein. Wir werden die Lösung noch diese Woche kennen lernen."

Wir sitzen um einen Tisch herum, bespannt mit Packpapier. Darauf skizzieren wir – insbesondere für Sandor – kurz den bisherigen Verlauf zur Annäherung an π. „Konnte Archimedes wissen, wie gut seine Annäherung 3+10/71 war?" Dass die von uns oben mit dem Flächeninhalt des 96-Ecks berechnete Zahl kleiner als π ist, leuchtet allen ein. Ebenso, dass wir entsprechende Überlegungen mit einer Annäherung von aussen anstellen können, um eine Abschätzung nach oben zu bekommen. Also werden wir uns heute nochmals ganz der Bestimmung von π widmen. – Wir sitzen um den langen Tisch mit den Packpapiernotizen, zeichnen jetzt bei einem Kreis zum einbeschriebenen auch das umbeschriebene n-Eck. Ähnlichkeit fällt sofort auf. Sie hilft uns, die Seite t_n des umbeschriebenen n-Ecks durch die Seite s_n des einbeschriebenen n-Ecks auszudrücken. Wir entwickeln diese Beziehung und ebenso die Formeln für Fläche A_n und Umfang V_n des umbeschriebenen Vielecks gemeinsam auf dem Packpapier. Auffallend ist die nahe Verwandtschaft dieser Formeln, die wir wieder finden in den Formeln für die Kreisberechnung. Individuell wird jetzt das Gewonnene notiert und anschliessend in einer Tabelle zahlenmässig umgesetzt. Verschiedene Werte übernehmen wir von früher.

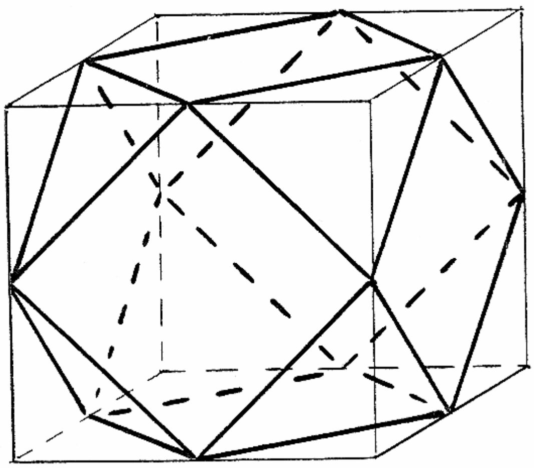


$$\underline{V} = s^3 - 4\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{s^2}{2}\cdot s\right)$$
$$= s^3 - \frac{2}{3}s^3 = \underline{\frac{1}{3}s^3}$$
$$F_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(s\sqrt{2})^2$$
$$\underline{O} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2\cdot 2 = \underline{2\sqrt{3}s^2}$$



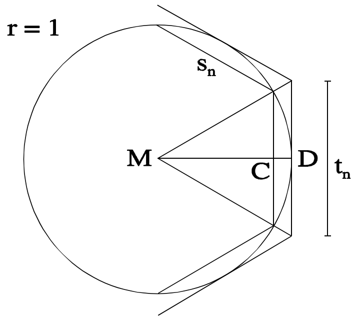
$h = \frac{s}{2}$ Kante $k = \frac{s\sqrt{2}}{2}$

$$\underline{V} = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{s}{2}\right) = \underline{\frac{1}{6}s^3}$$
$$O = 8\cdot F_\Delta = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$\underline{O = \sqrt{3}\cdot s^2}$$



$$\underline{V} = s^3 - 8\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{s^2}{8}\cdot\frac{s}{2}\right)$$
$$= s^3 - \frac{1}{6}s^3 = \underline{\frac{5}{6}s^3}$$
$$O = 6\cdot F_\square + 8\cdot F_\Delta$$
$$= 6\cdot\frac{s^2}{2} + 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$\underline{O = (3+\sqrt{3})s^2}$$

Lösung der Polyeder-Aufgaben 2 bis 4



$$t_n : s_n = \overline{MD} : \overline{MC} = 1 : \sqrt{1 - s_n^2/4}$$

$$\boxed{t_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}}$$

	UMFANG	FLÄCHE
umbeschriebenes n-Eck	$V_n = n \cdot t_n$	$A_n = n \cdot t_n / 2$
einbeschriebenes n-Eck	$U_n = n \cdot s_n$	$F_{2n} = n \cdot s_n / 2$
Kreis	$U = 2 \cdot \pi$	$F = \pi$

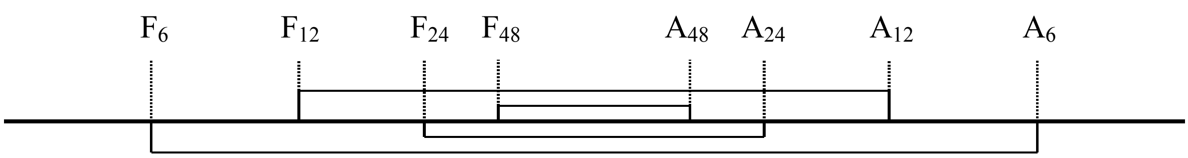
n	s_n	t_n	F_n	A_n
6	1	1.154701		3.464102
12	0.517638	0.535856	3	3.215390
24	0.261052	0.263305	3.105829	3.159660
48	0.130806	0.131087	3.132629	3.146086
96	0.065438	0.065473	3.139350	3.142715

Lange dauert es, bis allen klar ist, wie t_n und die Flächen berechnet werden. Ich verteile ein Blatt, auf dem die Daten bis zum 196608-Eck notiert sind. Die Stunde ist vorbei, harziger als sonst. Der draussen liegende Schnee ist wichtiger. Und doch: Auf Wunsch der Schülerinnen und Schüler halten wir heute vor dem Mittagessen noch eine Stunde.

Ich werde vorschlagen, frontal zu arbeiten, Übersicht zu verschaffen, das Erarbeitete zu ordnen und auszuwerten. Das Packpapier ist an die seitliche Wandtafel geklebt. Mehrere Blätter, die ich für die Stunde brauchen werde, liegen auf dem Tisch. Christof fällt die Näherung 355/113 aus China auf. „Wie gut ist diese Näherung?" Er schaut auf dem Taschenrechner und staunt. Anna sitzt seitlich auf der vordersten Bank und ist ebenfalls in das Blatt vertieft. Neugier und Interesse sind offenbar.
In Bildern zeige ich die Annäherung des Kreises durch das 6-Eck, das 12-Eck, das 24-Eck und das 48-Eck, welches schon fast nicht mehr vom Kreis unterschieden werden kann.

Wir halten fest:

1. $F_6 < F_{12} < F_{24} < F_{48} \; \ldots$
   $A_6 > A_{12} > A_{24} > A_{48} \; \ldots$



Der Flächenunterschied $A_n - F_n$ wird mit wachsendem n immer kleiner, strebt gegen null, was anschaulich sofort klar ist. Ebenso könnte der Kreisumfang von innen und von aussen angenähert werden.

Ich erläutere das **Prinzip der Intervallschachtelung**, während gleichzeitig ein Schachtelungsmodell mit Würfeln die Runde macht. Bekannte Beispiele sind die russischen Babuschkas, das Feilschen um einen guten Preis und das Verhandeln um einen Vertrag, auch wenn dies keine unendlichen Prozesse sind, es mag manchmal noch so danach aussehen. Christof: „Ist da noch etwas drin am Schluss?“ – Muriel: „Nichts.“ – Silvan: „ Doch, π!“ – Ich: „Wird die Kreisfläche π je von einem F_n überschritten?“ – „Nein.“ – „Wird sie je von einem A_n unterschritten?“ – „Nein.“ – „Wird sie jemals von einem F_n oder A_n erreicht?“ – „Nein. Also muss die Zahl π noch drin liegen.“ – Muriel: „Ist π in der Mitte der Intervalle?“ – Felix, ganz klar: „Nein, das Mittel müsste immer gleich sein.“ Er verweist auf mein Blatt, auf dem ich nebst den Flächen auch die Flächendifferenz und die Flächenmittel angegeben habe.

2. Archimedes kannte die Wurzeldarstellung und Wurzelberechnung in unserem Sinne nicht. Er musste mit einer schwerfälligen griechischen Buchstabenschreibweise für die Zahlen und mühsamen Annäherungen der Wurzeln durch rationale Zahlen arbeiten. So kam er anhand der halben Umfänge der 96-Ecke auf die Werte $3\ 10/71 < \pi < 3\ 10/70 = 22/7$. Wesentlich und ganz neu war die Erkenntnis von Archimedes, dass dieses Verhältnis Umfang zu Durchmesser, U:d, nur angenähert mit Zahlen zu fassen ist und deshalb zwischen zwei Grenzen eingeschlossen werden muss. Dies tat er dann auch mit sehr guten Werten. Die Grösse 22/7 wurde über Jahrhunderte in der Praxis benutzt und später *Archimedische Zahl* genannt. Berechnen wir mit dem Taschenrechner die halben Umfänge des einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen 96-Ecks und vergleichen wir mit den Angaben von Archimedes, so staunen wir über die geringen Abweichungen. Wie viele Prozent weicht der Wert 22/7 vom effektiven Wert für π ab? Vergleichen können wir nur mit dem Taschenrechnerwert, was für unseren Zweck allerdings keinen Unterschied macht. Nach längeren Diskussionen über Prozente und Promille stellen wir fest, dass der untere Wert 0.24 Promille kleiner und der obere 0.40 Promille grösser ist als π. Der untere Wert ist also genauer; der obere, einfachere und handlichere, hat sich in der Praxis aber durchgesetzt. „Ob wohl bekannt war, dass der untere Wert genauer ist?“ – „Nannte Archimedes diese Zahl auch π?“ – „Nein, erst seit Euler ist dies üblich.“ – „Aber es sind doch Texte von Archimedes bekannt.“ – Dieser argumentiert geometrisch, vergleicht Flächen oder Streckenlängen: „Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so gross wie der Durchmesser und noch etwas grösser, nämlich um weniger als 1/7 des Durchmessers, aber um mehr als 10/71.“ Das Verfahren von Archimedes weist auch einen Weg, wie man π konstruktiv annähern kann. Wie später bewiesen wurde, ist π aber nicht mit Lineal und Zirkel konstruierbar.

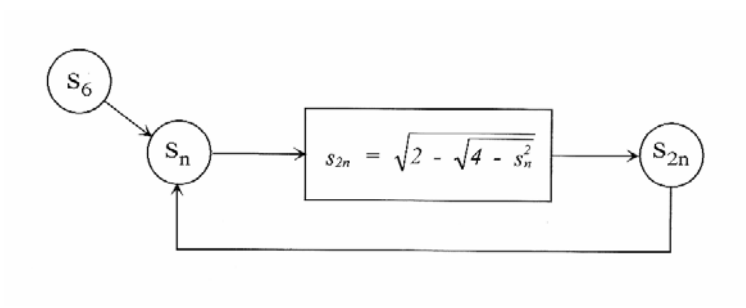
Ich weise auf die drei alten griechischen Konstruktionsprobleme hin:

– die Quadratur des Zirkels, d.h. die konstruktive Verwandlung eines Kreises in ein Quadrat (mit gleicher Fläche),
– die Verdoppelung des Würfels und
– die Dreiteilung eines vorgegebenen Winkels.

Die Mathematiker haben inzwischen bewiesen, dass diese Probleme konstruktiv nicht lösbar sind. Trotzdem will mir morgen Christof einen Lösungsvorschlag bringen. Im Gegenzug werde ich die Papierstreifenkonstruktion von Archimedes zur Dreiteilung des Winkels präsentieren und begründen lassen.

Es folgt noch ein Streitgespräch über Konstruierbarkeit, Annäherung und Genauigkeit. „Die dritte Wurzel aus 2 können wir doch berechnen und dann auf dem Lineal abtragen.“ – „Diese Zahl lässt sich aber nicht konstruieren. Die Quadratwurzel aus 2 z.B. lässt sich konstruieren mit dem Satz des Pythagoras“ – „Aber das wird nicht genauer als die berechnete Zahl.“ – „Es geht nicht um Genauigkeit, sondern um die Möglichkeit der Konstruktion mit Zirkel und Lineal.“ . . .

3. Ich weise nochmals auf die Rekursion und ihre grosse Bedeutung im Zusammenhang mit dem Computer hin. Ebenso auf Berechnungen von π durch Reihenentwicklungen. Wir beginnen mit der Seitenlänge s_6 des einbeschriebenen Sechsecks als Startwert, d.h. n = 6. Eingesetzt in die Formel erhalten wir s_{12}, die Seite des 12-Ecks. Diesen Wert nehmen wir als neuen Eingabewert, also n = 12, und es resultiert s_{24}, die Seite des 24-Ecks, usw... Geeignete Rechenhilfsmittel vorausgesetzt lässt sich dieser Prozess beliebig fortsetzen.



Meine Zusammenstellung über die Annäherung der Menschheit an dieses Verhältnis von Umfang zu Durchmesser bzw. von Fläche zu r^2 von den biblischen Anfängen bis zu Archimedes, über die Einführung der Bezeichnung π vor gut 250 Jahren und die Berechnung von über einer Billion Stellen (Stand Dezember 2002) heute weckt grosses Interesse. Ob ich ein Buch mit den ersten 1’000'000'000'000 Stellen von π hätte. Ich bezeichne das als Papierverschwendung. Felix: „Dem Rechner kannst Du unendlich viele Stellen einpflanzen.“ – „???“ – Felix: „Aber man kann schon recht viele, wenn man einen Gigabyte-Speicher hat, da hat man schon fast unendlich viele Stellen.“ Gegen Schluss der Stunde höre ich den Ruf nach Aufschreiben, Verdauen, Musse.

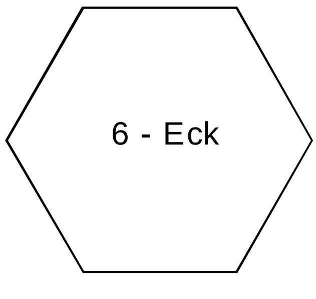
Didaktische Anmerkungen: *Diese Gleichheit der Verhältnisse Umfang zu Durchmesser mit Fläche zu Radiusquadrat ist wohl eines der Phänomene, die uns vorerst staunen lassen, unerklärlich erscheinen mögen, zum Verweilen auffordern. Das Verhältnis Umfang zu Durchmesser ist nicht durch ein Verhältnis ganzer Zahlen anzugeben, sondern grundsätzlich nur durch einen Näherungsprozess bestimmbar. Damit war es erst einem Genie wie Archimedes, der die exakte Argumentation des Theoretikers mit der Offenheit des Praktikers verband, möglich, sich dieser Grösse zu nähern. Er zeigt Methoden, mit denen wir dies* sowohl konstruktiv als auch zahlenmässig *beliebig genau tun können. Unsere neuzeitlichen algebraischen und elektronischen Mittel erlauben zusätzlich theoretische und praktische Kenntnisse über diese universelle Konstante π.*

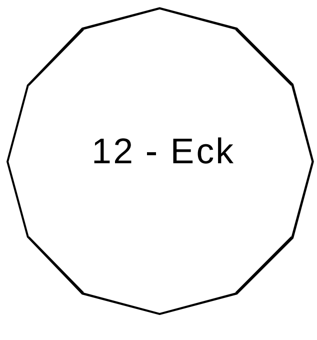
Numerische Zusammenstellung

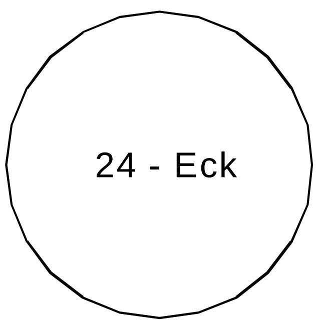
Approximation des Kreises durch
regelmässige Vielecke,
ausgehend vom gleichseitigen Dreieck

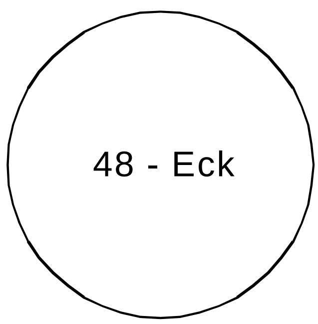
n-Eck	Fläche innen	Fläche aussen	Differenz	Mittelwert
N	F_n	A_n	$A_n - F_n$	$(A_n + F_n) / 2$
3	1.2990381057	5.1961524227	3.8971143170	3.2475952642
6	2.5980762114	3.4641016151	0.8660254038	3.0310889132
12	3.0000000000	3.2153903092	0.2153903092	3.1076951546
24	3.1058285412	3.1596599421	0.0538314009	3.1327442417
48	3.1326286133	3.1460862151	0.0134576019	3.1393574142
96	3.1393502030	3.1427145996	0.0033643966	3.1410324013
192	3.1410319509	3.1418730500	0.0008410991	3.1414525004
384	3.1414524723	3.1416627471	0.0002102748	3.1415576097
768	3.1415576079	3.1416101766	0.0000525687	3.1415838923
1536	3.1415838921	3.1415970343	0.0000131422	3.1415904632
3072	3.1415904632	3.1415937488	0.0000032856	3.1415921060
6144	3.1415921060	3.1415929274	0.0000008214	3.1415925167

$\pi = 3.1415926535...$









Die Zahl π im Laufe der Zeit

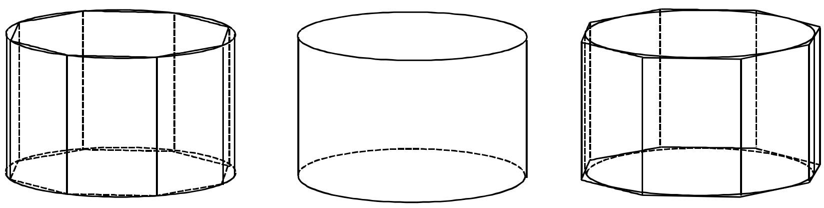
$$\pi = U / d = F / r^2 = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846 \ldots$$

Zeit		π	Genauigkeit
1500 BC	Babylonier		
	Bibel (AT, König Salomo)	3	(- 4.5%)
	Babylonier später	$25/8 = 3.125$	(- 0.5%)
500 BC	Ägypten (Papyrus Rhind)	$(16/9)^2 = 3.1605$	(+0.6%)
250 BC	Archimedes	$3+10/71 < \pi < 3+10/70 = 22/7$	(- 0.02%)
	(→Archimedische Zahl; 22/7 über Jahrhunderte im Abendland verwendet!)		(+0.04%)
470 AC	China	$355/113$	(+0.000008%!)
650 AC	Brahmagupta (Indien)	$\sqrt{10}$	(+0.7%)
1600 AC	Ludolf van Ceulen (1540 - 1610) berechnet π auf 35 richtige Stellen! (→Ludolfsche Zahl)		
1676 AC	Gregory und Leibniz : Gleichung $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - + \ldots$ (langsam: ca. 1 Million Summanden für 6 richtige Dezimalen!)		
1736 AC	Leonhard Euler (1707 - 1783) benutzt in seinem Hauptwerk π für U/d nach dem griechischen Wort für Umfang peri métros.		
1761 AC	Lambert (1728 - 1777) beweist, dass π irrational ist.		
1882 AC	Lindemann (1852 - 1932) beweist, dass π transzendent, also nicht algebraisch ist. Damit ist die Quadratur des Zirkels nicht möglich!		
1948 AC	vor Computereinsatz: 808 Stellen von π bekannt.		
2002 AC	Eine Forschergruppe der Universität Tokio hat inzwischen mit Computerunterstützung über eine Billion Stellen errechnet.		

IV. Akt: Im Rundland: Über Zylinder und Kegel zur Kugel

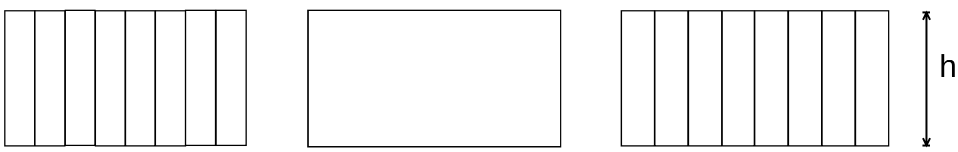
Noch am Abend stelle ich drei Bänke zu einem Hufeisen zusammen, um den **Dienstag** in einer anderen Struktur zu starten. Der Mathematiklehrer des Kurses besucht uns, sitzt als Zuschauer hinten in der Ecke. „Was steht an für heute?“ Christof hat seine nobelpreisverdächtige Dreiteilung des Winkels im Safe seines Zimmers vergessen; also verzichte ich im Moment darauf, auf die »Papierstreifenkonstruktion« von Archimedes einzugehen. Silvan wünscht eine Zusammenstellung aller bisherigen Formeln. Ich bitte ihn, die bereits erarbeitete gemeinsame Liste zuhanden aller zu vervollständigen. Wir beschliessen, erste Schritte ins Rundland zu wagen und uns Zeit zum Verdauen und Aufschreiben zu nehmen. Von den Tischen nebenan hole ich Zylinder und Kegel, stelle sie in die Mitte und rege an zum Nachdenken über Volumen und Oberfläche dieser Körper. Vorerst jeder still für sich. – Nach kurzer Zeit schauen mich einige an, signalisieren ihre Bereitschaft.
„Mit welchem Körper beginnt Ihr?“ – Christof: „Mit dem Zylinder, dieser ist gleich aufgebaut wie das Prisma, also haben wir die gleiche Formel: Das Volumen berechnet sich als Grundfläche mal Höhe.“ „Wäre Archimedes damit zufrieden gewesen?“ – Felix: „Er hätte vielleicht einen quadratischen Quader rundherum gebaut, dann parallel zur Höhe die Kanten weg geschnitten zum regelmässigen Achteck, usw. ... So können wir beliebig nahe an den Zylinder ran kommen, wie wir wollen.“ Dass wir von aussen und von innen so den Zylinder einschachteln können, leuchtet ein. Mit der Grundfläche wird gleichzeitig auch das Volumen eingeschachtelt und es gilt:

$$\mathbf{V_z} = G\,h = \boldsymbol{\pi\, r^2\, h}$$



Wickeln wir den Mantel von einbeschriebenem und umschriebenem Prisma ab, so erhalten wir eine Einschachtelung für den Zylindermantel M_z.

$$8 \cdot s_8 = U_8 \quad < \quad U = 2\,\pi\, r \quad < \quad 8 \cdot t_8 = V_8$$

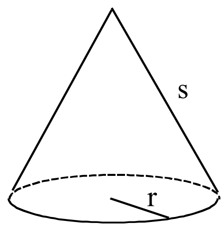


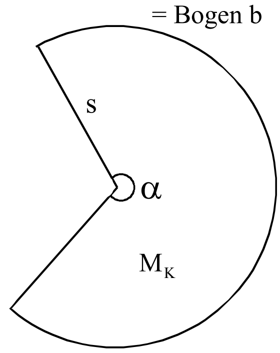
$$h \cdot U_8 \quad < \quad M_z = h \cdot 2\,\pi\, r \quad < \quad h \cdot V_8$$

Also gilt für den Mantel: $\mathbf{M_z} = U_o\, h = \mathbf{2\,\pi\, r\, h}$
und für die Oberfläche: $\mathbf{O_z} = 2\,G + M_z = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h = \mathbf{2\pi r\,(r+h)}$

„Und wie steht es mit dem Kegel?“ Felix: „Das Volumen berechnet sich wie bei der Pyramide.“

Christof: „Der Kegel lässt sich durch eine 6-eckige Pyramide annähern, durch Verdoppelung der Eckenzahl kommen wir beliebig nahe ans Volumen.“ – Wieder können wir die Annäherung von aussen und von innen durchführen und erhalten somit für das Kegelvolumen $\mathbf{V_K}$ = (G h) / 3 = $\mathbf{(\pi\, r^2\, h) / 3}$.





Und wie bestimmen wir den Kegelmantel M_K? Hier ist die Einschachtelung wieder vergessen. Christoph zeichnet an der Tafel eine Sektorfläche als Abwicklung des Kegels. „Es gibt einen Zentriwinkel.“ Christof will sagen, wenn wir den Zentriwinkel α kennen, dann können wir die Sektorfläche berechnen. Anna: „Wenn wir den Kreisbogen kennen, kann man die Fläche berechnen.“ – Ich: „Kennen wir den Bogen b?“ – Anna: „Ja, das ist 2πr, der Umfang U des Grundkreises beim Kegel.“ – „Und jetzt?“ – Es dauert lange, bis die Proportionalität zwischen Winkeln im Zentrum, zugehörigen Flächen und entsprechenden Bogen erkannt wird. Für einige Schüler ein AHA-Erlebnis!

Doch dann folgert Felix Schlag auf Schlag.
$\alpha : 360° = M_K : F_o = b : U = 2\pi r : 2\pi s = r : s$
Dabei ist F_o die ganze Fläche des Kreises mit Radius s, also $F_o = \pi s^2$.

Es folgt für den Kegelmantel: $\mathbf{M_K} = (r{:}s)\cdot F_o = (r{:}s)\cdot \pi s^2 = \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{r\, s}$
und für die Kegeloberfläche: $\mathbf{O_K} = G + M_K = \pi r^2 + \pi\, r\, s = \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{r\, (r + s)}$
Wie einfach doch im Raum diese Formeln für Zylinder und Kegel sind! Ist der Übergang vom Geraden zum Gekrümmten mit π gelungen, so herrschen wieder einfachste Gesetzmässigkeiten!

Um an Früheres anzuknüpfen, zeige ich auf obige Figur, wo gilt: Umfang U = 2πr = Bogen b. Aufgelöst ergibt sich π = b/(2r). Die Sektorfläche F_s, oben dargestellt als Mantelfläche M_k, wird zu $\mathbf{F_s} = M_k = \pi rs = [b/(2r)] \cdot rs = \mathbf{(b \cdot s)/2}$.
Die Formel erinnert uns an die Formel für die Fläche des Dreiecks! Die Fläche eines Kreissektors mit Radius s und Bogen b ist gleich gross wie die Fläche eines Dreiecks mit Grundlinie b und Höhe s!

Es war ein konzentriertes, lebendiges und konstruktives Gespräch, das zeigte, dass die wichtigsten Ideen und Begriffe vorhanden sind. Die Schülerinnen und Schüler beginnen, das Erarbeitete aufzuschreiben, ohne alles von mir nochmals zusammengestellt zu erhalten. Andernorts würde jetzt die Pausenglocke unterbrechen; hier verbleibt bis zum Ertönen des Gongs noch eine gute halbe Stunde, um aufzuschreiben, zu verdauen und bisherigen oder allenfalls einer neuen Fragestellung nachzugehen.

So zum Beispiel der folgenden Aufgabe:
Die kleine Pizza hat einen Durchmesser von 18 cm, die grosse von 26 cm. Um wie viel Prozent grösser sind a) Umfang b) Fläche c) Volumen der grossen Pizza?

Meine Pizzafragen wurden offenbar im Restaurant auch schon aufgeworfen.
So hat jedes noch zu tun, der Rest der Stunde vergeht im Nu. Dies war eine der besten Sitzungen bisher. Was hat wohl dazu beigetragen: Der Besuch des Mathematiklehrers, die andere Sitzordnung, das eher einfache Thema, das mildere Wetter, ... ???

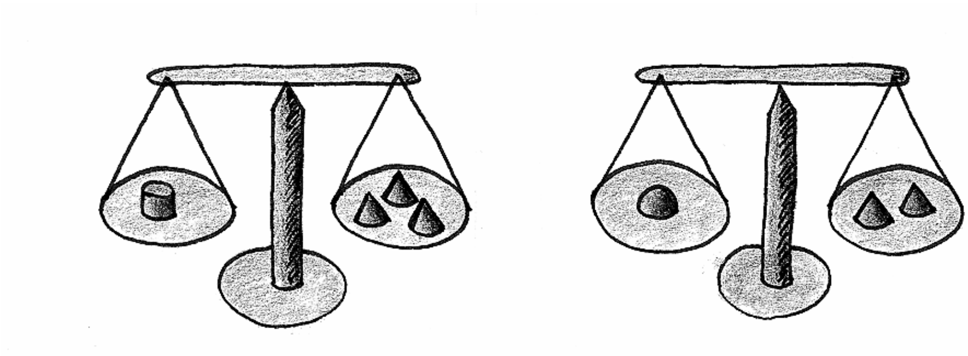
Heute ist **Mittwoch**. Der Mathematiklehrer hat nochmals hinten Platz genommen. Einige der Schüler sind schon da, beschäftigen sich mit der „Pizza-Aufgabe“. Komisch, wenn sie da sind, läuft etwas, aber zuhause wird wenig gearbeitet. Es gibt einen fliessenden Anfang. Felix kommt 10 Minuten verspätet, da er die Bahn verpasst hat. Ich erläutere kurz meine Intentionen: die Pizza-Aufgabe klären und Originalsätze von Archimedes studieren, um zu erfahren, wie er sich bildhaft mit Flächenvergleichen statt mit formalen Gleichungen ausdrückt. Nach dem Bereinigen der Pizza-Aufgabe – der Umfang ist 44.4 % grösser; Fläche und Volumen sind je um 108 % grösser – lege ich drei Sätze von Archimedes über Kegel und Kegelstumpfe vor und lasse nachdenken.

1. „Der Mantel jedes geraden Kegels ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zwischen der Seitenlinie des Kegels und dem Radius des Grundkreises.“ (Bemerkung: x heisst mittlere Proportionale von a und b, wenn gilt: a : x = x : b , d.h. x ist die Grösse in der Mitte dieser Proportionalität.)
2. „Der Mantel eines geraden Kegels hat zum Grundkreise dasselbe Verhältnis wie die Seitenlinie zum Radius des Grundkreises.“
3. „Wenn ein gerader Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist das Stück des Kegelmantels, das zwischen den parallelen Ebenen liegt, gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zwischen dem Stück der Seitenlinie, das zwischen den parallelen Ebenen liegt und der Summe der Radien des Grundkreises und des Schnittkreises.“

Die Sätze von Archimedes erzeugen Kopfweh. Christof will es aufgeben. Anna empfiehlt, eine Zeichnung zu machen. Was ist die mittlere Proportionale? Endlich klärt sich das Ganze, steht der Satz in Form der einfachen Gleichung $M_K = \pi\, r\, s$ an der Tafel. Und der Beweis, die Herleitung? Das haben wir ja in der letzten Stunde herausgefunden! Heureka! Der zweite Satz wird besser verstanden. Er ergibt sich für uns ‚sofort’ algebraisch. Beim dritten Satz: noch mehr Kopfweh! Endlich kommen die Zeichnungen, dann – nach langem auch die Formel! Noch länger dauert es für die Herleitung dieser Formel. Für die individuelle Bearbeitung fehlt die Energie, also bewältigen wir es zusammen. Altes Wissen über Ähnlichkeit und Proportionen kann dabei reaktiviert werden. Zum Notieren reicht die Zeit nicht mehr. Auch die Kugel bleibt für morgen verspart.

Es ist **Donnerstagmorgen**, die Schüler wirken müde. Ich verteile Tennisbälle und leite einige Übungen an für Hand- und Rückenmassage. Es ist allgemein wohltuend. Noch lange hätten alle weiterfahren können. So, das war die Begegnung mit der Kugeloberfläche!

Bevor wir uns dieser widmen können, sollte aber das Gestrige notiert werden. Da sehr unterschiedlich Zeit gebraucht wird, lege ich – entgegen meiner ursprünglichen Absicht – zum Experimentieren eine grosse indische Waage samt Halbkugel, Zylinder und drei Kegeln aus Holz, alle mit gleichem Grundkreis und gleicher Höhe, auf einen Tisch. Trotz rascher Ermüdungserscheinungen in den Armen und dem Ruf nach einem Haken in der Decke finden die Schülerinnen rasch, dass zwei Kegel wohl gleich schwer sind wie die Halbkugel und dass drei Kegel gleich schwer sind wie der Zylinder. Dass letzteres nach dem bisher Gefundenen klar ist, wird bald entdeckt. Christof folgert: „Also ergeben vier Kegel eine Kugel.“ – Damit ist er zufrieden. Die Formel für das Kugelvolumen entsteht an der Tafel. „Dies war eine experimentelle Annäherung an die Kugel“, sage ich und setze hinter die Formel drei grosse Fragezeichen.



$$V_O = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad ???$$

Ob Archimedes dieses Experiment auch gemacht hat? In Konstantinopel wurde 1906 ein Palimpsest entdeckt, d.h. ein beschriebenes Pergament, das Jahrhunderte später von der Tinte gereinigt und überschrieben wurde, wobei der ursprüngliche Text noch ganz schwach sichtbar blieb. In diesem Text ist ein Brief des Archimedes an Erathostenes enthalten, in dem er seine „Methode“ beschreibt, dass er experimentelle und heuristische Wege nutzte, um auf Formeln zu stossen, die er anschliessend aber streng bewies. Folgerichtig müsste jetzt eigentlich seine geniale Untersuchung kommen, wie er Kugel, Kegel und Zylinder in dünnste Scheiben schneidet und diese dann an einem Hebel anhängt, um schliesslich mit dem Hebelgesetz auf die Formel zu kommen. Es ist anzunehmen, dass Archimedes auch unseren einfachen Wägeversuch durchgeführt hat. Da wir bereits eine experimentelle Hinleitung zum Kugelvolumen gesehen haben, entscheide ich mich zu zeigen, wie Archimedes mit strengen Überlegungen die Kugeloberfläche O_O herleitet. Die Vorarbeiten haben wir mit den drei Sätzen gestern schon gelegt. Der bevorstehende Weg ist sehr anspruchsvoll und darum gehe ich voran: „Ich will Euch heute zu dieser Formel führen, wie ein Bergführer eine Gruppe in schwierigem Gelände zum Gipfel führt. Archimedes hat als Erster diesen Weg beschritten. Ihr müsst mir vertrauen, dass ich Euch heil ans Ziel bringe. Fragt nicht bei jedem Schritt, warum gehen wir jetzt hier- und nicht dorthin. Dies entbindet aber nicht von der Eigenverantwortung, Euch bei jedem Schritt zu vergewissern, dass der neue Stand hält, dass Ihr dort sicher und gesichert seid, nicht hängen bleibt oder gar abstürzt.“

Anknüpfend an Euklids Erzeugung der Kugel durch Rotation eines Halbkreises und Archimedes’ Einschachtelung des Kreises durch regelmässige Vielecke ergibt sich das Vorgehen (ausführlich in Dunham 1996, S. 263-276; Meschkowski Bd. I 1984, S. 96-99). Ein mitgebrachtes Drahtmodell liefert die Anschauung: die Hälfte eines regelmässigen Zwölfecks wird um eine Achse gedreht. Dabei entsteht ein Rotationskörper, bestehend aus zwei Kegelmänteln und einigen Kegelstumpfmänteln. Die Formeln zur Berechnung der einzelnen Oberflächen kennen wir bereits. Daraus bestimmen wir die Oberfläche O_R des ganzen Rotationskörpers.

Mantel des Kegels: $M_K = \pi \cdot s \cdot r$

Mantel des Kegelstumpfs: $M_{KS} = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$

DIE HEURISTISCHE METHODE

Brief von Archimedes an Eratosthenes von Kyrene
(1906 entdeckt in Konstantinopel als Palimpsest.)

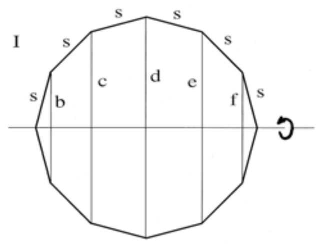
Archimedes berichtet in diesem Brief über „eine eigentümliche Methode, . . . um einige mathematische Fragen durch die Mechanik zu untersuchen“:

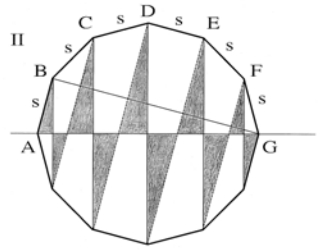
„Und dies ist nach meiner Überzeugung ebenso nützlich, auch um die Lehrsätze selbst zu beweisen; denn manches, was mir vorher durch die Mechanik klar geworden, wurde nachher bewiesen durch die Geometrie, weil die Behandlung durch jene Methode noch nicht durch Beweis begründet war; es ist nämlich leichter, wenn man durch diese Methode vorher eine Vorstellung von den Fragen gewonnen hat, den Beweis herzustellen als ihn ohne eine vorläufige Vorstellung zu erfinden. So wird man auch an den bekannten Lehrsätzen, deren Beweis Eudoxos zuerst gefunden hat, nämlich von dem Kegel und der Pyramide, dass sie 1/3 sind, der Kegel des Zylinders und die Pyramide des Prismas, die dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe haben, dem Demokritos einen nicht geringen Anteil zuerkennen, der zuerst von dem erwähnten Körper den Ausspruch getan hat ohne Beweis.“

Gemäss Zeichnung I bilden wir die Oberfläche O_R des Rotationskörpers.

$O_R = \pi \cdot s \cdot b + \pi \cdot s \cdot (b+c) + \pi \cdot s \cdot (c+d) + \; ... + \pi \cdot s \cdot (e+f) + \pi \cdot s \cdot f$

$\quad = \pi \cdot s \cdot (2b + 2c + \ldots + 2f)$





Um diesen langen Klammerausdruck in den Griff zu bekommen, hat Archimedes zusätzliche Linien eingezeichnet und folgendes überlegt. In Zeichnung II sind alle Peripheriewinkel über Sehne s gleich. Somit sind die schraffierten Dreiecke ähnlich und ähnlich zum Dreieck ABG mit $\overline{BG} = x$. Unter mehrfacher Bildung des Verhältnisses s : x und Addition ergibt sich

$\quad s \cdot (2b + 2c + \ldots + 2f) = 2 \cdot r \cdot x$,

was wir oben einsetzen können.

Es folgt $O_R = \pi \cdot 2r \cdot x < \pi \cdot 2r \cdot 2r = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, da $x < 2r$. Mit wachsender Eckenzahl strebt x gegen 2r. Gleichzeitig gilt, dass die Oberfläche O_R jedes so einbeschriebenen Rotationskörpers kleiner ist als die Kugeloberfläche O_O. Intuitiv einen Grenzwert bildend, schliessen die Schülerinnen und Schüler, dass damit

$O_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Archimedes folgert weniger voreilig: O_O ist nicht kleiner als $4 \cdot \pi \cdot r^2$, denn jeder kleinere Wert kann durch eine verbesserte Annäherung übertroffen werden. Durch Annäherung der Kugel von aussen folgert er entsprechend: O_O ist nicht grösser als $4 \cdot \pi \cdot r^2$. Erst aus diesen beiden Aussagen folgt für ihn: $O_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Das scheint den Schülern spitzfindig zu sein. Hauptsache, wir haben eine Formel gefunden. Zur Würdigung des Resultats halte ich meine hölzerne Halbkugel hoch, drehe sie einmal so, einmal so und möchte an meine Ausgangsfrage anfangs der Woche erinnern. – Erst das Stichwort „Vollmond“ weckt die Erinnerung. Damals wurde vermutet, die beleuchtete Halbkugelfläche betrage das $\pi/2$ fache der Scheibe. Jetzt wird klar, dass die beleuchtete Mondfläche als halbe Kugeloberfläche mit $2 \cdot \pi \cdot r^2$ gerade das Doppelte der Scheibenfläche $\pi \cdot r^2$ ausmacht. Wie dies ja Wagenschein in „Zweierlei Wissen“ so schön beschrieben, nur nicht hergeleitet hat.

Sogar meine heutige Herausforderung kann ich deponieren: Jedes erhält eine in Goldpapier eingewickelte Schokoladekugel. „Wie viel würde eine derartige Kugel aus Gold kosten? Die experimentell gefundene Volumenformel dürft Ihr ausnahmsweise benutzen.“ – „Aber was ist der Goldpreis?“ – „Was ist die Dichte von Gold?“ Die Zahlen verrate ich nicht, merke aber, dass die Schülerinnen auf der richtigen Spur sind. Christoph verspricht wieder einmal eine Lösung. Wer hat wohl die Schoggikugel gegessen, bevor er deren Durchmesser bestimmt hat? Beim Gedanken, morgen die Kugeln zu Beginn der Stunde wieder einzusammeln, muss ich schmunzeln.

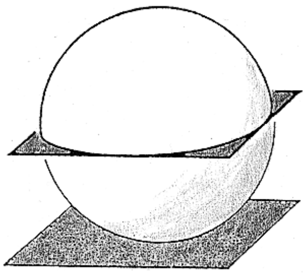
Bereits ist **Freitag**. Ich erkläre, dass ich heute stofflich möglichst abschliessen, d.h. insbesondere das Volumen der Kugel klären, Folgerungen ziehen, und einige Gedanken über Leben und Werk von Archimedes anfügen möchte. So bleibt morgen Zeit für Rückblick und Auswertung. Zum gemütlichen Ausklang wollen wir uns am Abend in der Dorfbeiz treffen.

Erstaunlich, alle Kugeln sind noch vorhanden. Die Schülerinnen und Schüler haben sich bemüht, Dichte wie Preis gefunden und sie haben gerechnet. Ein vernünftiges Resultat liegt allerdings nicht vor. Grund genug, das Problem zu klären. Erstaunt sind alle, dass die Kugel in Gold eine Masse von rund 200 g und einen Preis von ca. CHF 3000.- hat.

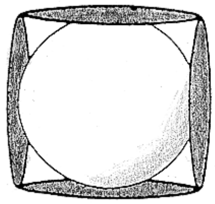
Ich erinnere und notiere die Formel für die Kugeloberfläche: $O_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Archimedes hat das ja nicht als Gleichung geschrieben. Welchen Satz mag er notiert haben? – Anna: „Die Oberfläche der Kugel ist das Vierfache des Kreises“ oder wie es Archimedes (1996, S. 114) ausdrückt: „Die Oberfläche der Kugel ist viermal so gross wie die Fläche eines ihrer grössten Kreise.“ Martin Wagenschein formuliert und veranschaulicht dies im Abschnitt „Kern und Schale runder Dinge“ (1965, S. 70f) folgendermassen:

„π mal würde der Teppich die Fläche der Kugel bedecken.“



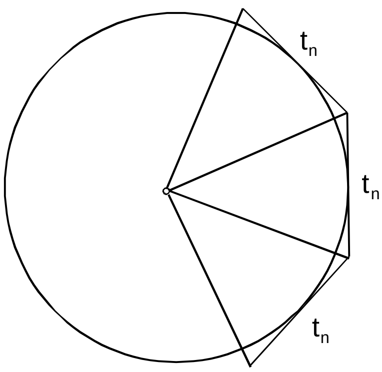
„Die vier Scheiben haben zusammen dieselbe Fläche wie die Kugel.“



$$\pi \cdot (4 \cdot r^2) = O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot (\pi \cdot r^2)$$

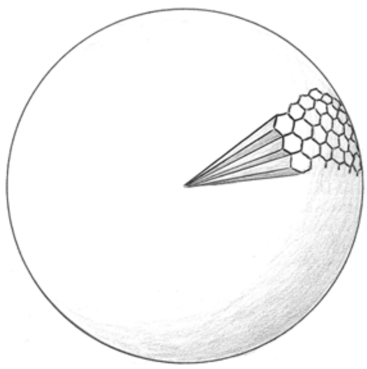
Für das Kugelvolumen V_O wähle ich den Weg mit der Analogie zum Kreis. Dort haben wir bereits die Kreisfläche ausgedrückt durch den Kreisumfang.
Wir wiederholen kurz die Annäherung an den Kreis. Ich wähle das umbeschriebene Vieleck mit dem Vorteil, dass alle Höhen gleich dem Radius sind. Die Grundseiten der Dreiecke ergeben zusammen den Umfang des Vielecks, in der Verfeinerung nähert er sich immer mehr dem Kreisumfang. Muriel zeigt im Heft, wo wir das diskutiert haben. Unterteilen wir die Kugeloberfläche zum Beispiel wie beim kugelförmigen Facettenauge einer Biene und denken wir uns die keilförmigen Einzelteile bis zum Mittelpunkt fortgesetzt, so entstehen näherungsweise Pyramiden und das Kugelvolumen ergibt sich angenähert als Summe all dieser Pyramiden, deren Grundflächen zusammengenommen die Kugeloberfläche bilden.

Die Kreisfläche



$$F \approx n\frac{t_n r}{2} = \frac{U_n r}{2} \approx \frac{Ur}{2}$$

Das Kugelvolumen



$$V_o \approx \frac{G_1 r}{3} + \frac{G_2 r}{3} + \quad + \frac{G_n r}{3}$$
$$= \frac{r}{3}(G_1 + G_2 + \quad + G_n) \approx \frac{O_o r}{3}$$

Schliesslich haben wir diese Zusammenhänge als einfache Formeln an der Tafel. Einen Moment lang würdigen wir die beiden Formeln; einmal im Zweidimensionalen, einmal im Dreidimensionalen, analog zu Dreieck und Pyramide beziehungsweise Sektor und Kegel.

Während Silvan und Christof damit zufrieden sind, setzt Felix sofort die Oberflächenformel ein und findet die Volumenformel.

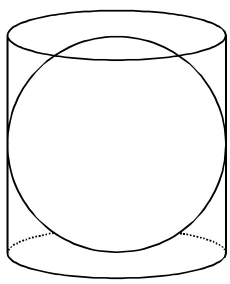
Aus $V_O = (O_O \cdot r) / 3$ und $O_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ folgt $V_O = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Auch wenn dieses Vorgehen kein strenger Beweis ist, so finden wir doch bestätigt, was wir bereits unserem Wägeexperiment entnommen haben. Auch für das Volumen hat Archimedes einen anspruchsvollen, äusserst genialen Beweis geliefert. Wir verzichten darauf an dieser Stelle. (vgl. dazu Archimedes 1996, S. 107ff)

Ich zeichne eine Kugel und den umschliessenden Zylinder. Wie verhält sich der Zylinder zur Kugel? Christof weiss es bereits.

Von Archimedes folgt in Kurzfassung:
„Der Zylinder, der die gleiche Grundfläche besitzt wie einer der grössten Kreise einer Kugel und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, ist sowohl seinem Inhalt als auch seiner Oberfläche nach eineinhalb mal so gross wie die Kugel.“

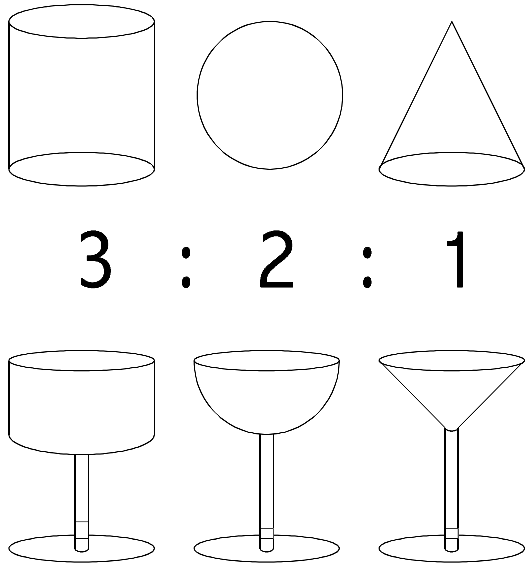
Oder wie es Wagenschein (1965, S. 71) formuliert: *„Zwei Drittel ihres Säulenkäfigs fasst die Kugel, und ebenfalls zwei Drittel seiner Oberfläche ist ihre Fläche.“*



$$V_Z : V_O = 2 \pi r^3 : {}^4/_3 \pi r^3 = 3 : 2$$

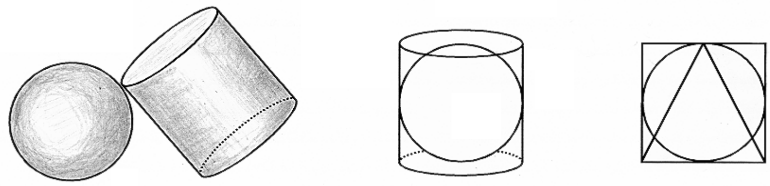
$$O_Z : O_O = 6 \pi r^2 : 4 \pi r^2 = 3 : 2$$

Ich ergänze noch den Kegel mit gleichem Kreis und gleicher Höhe.
Felix sieht sofort, dass sich die Volumina von Kugel zu Kegel wie 2 : 1 verhalten, da sich Zylinder zu Kegel wie 3 : 1 und Zylinder zu Kugel wie 3 : 2 verhalten.
(Inzwischen bin ich stolzer Besitzer von drei entsprechenden Trinkgläsern, mit denen sich dieses Volumenverhältnis sehr schön veranschaulichen lässt.)



Abschluss: Nach- und Schlussbetrachtung

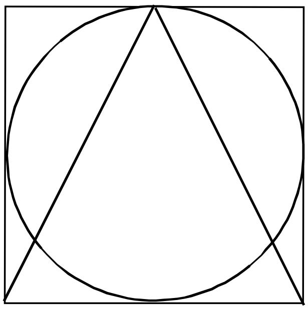
Damit sind wir unmerklich bei den Schlussbetrachtungen angelangt. Für Archimedes war seine Arbeit über diese Körper so wichtig, dass er sich Zylinder und Kugel auf seinem Grabmal verewigt wünschte. Warum nicht auch einen Kegel? Der Zusammenhang zwischen Kegel und Zylinder war bereits Euklid bekannt. Die Leistung von Archimedes waren die Berechnung von Volumen und Oberfläche der Kugel und der Vergleich mit dem Zylinder, der sich genial in dem einen Satz ausdrückt, dass Volumen wie Oberfläche 2/3 der entsprechenden Grössen beim Zylinder, die damals ja bekannt waren, ausmachen. „Wie würdet Ihr das auf dem Grab dargestellt haben?“ – „Glaszylinder mit Steinkugel im Innern.“ – „Das Glas geht aber kaputt.“ – „Zylinderförmiger Sarg mit Kugel an Stelle des Kopfes.“ – „Ein Zylinder angelehnt an eine Kugel. Die Kugel kann ja nicht schräg stehen.“ – Dies finde ich eine gute Lösung. Daneben zeichne ich die zwei Versionen, die ich in Büchern gefunden habe. Jedes der Bücher behauptet, so seien die Körper dargestellt gewesen, na ja!

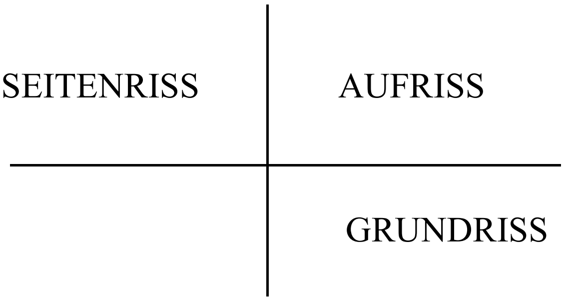


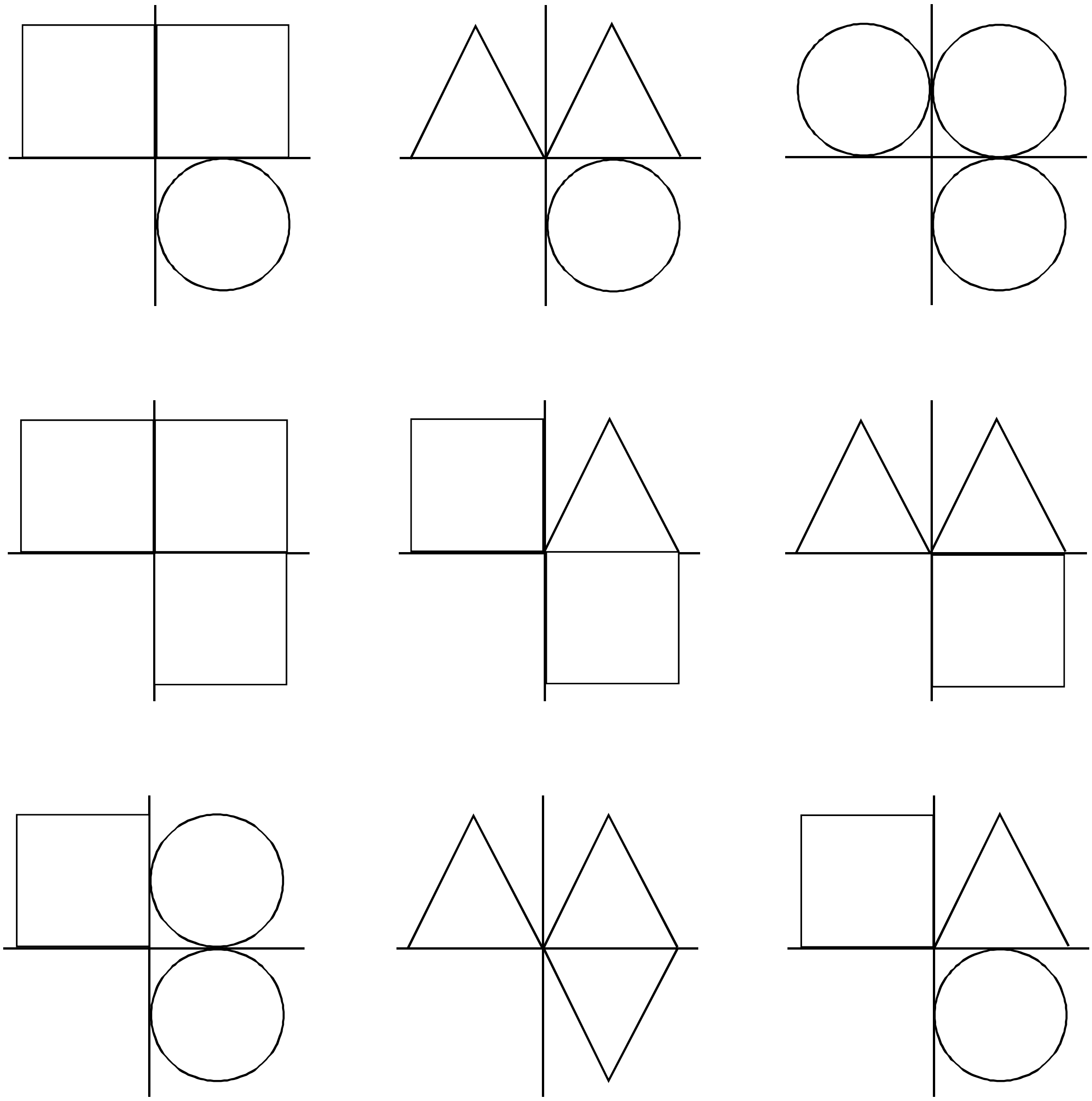
Die letzte Version wird als zu platt empfunden und abgelehnt. Wie Zylinder und Kugel auf dem Grabstein dargestellt wurden, wissen wir bis heute nicht. Christof: „Vielleicht hat’s den gar nie gegeben. Vielleicht hat ja Archimedes gar nie gelebt.“ Ich erzähle von den vielen in Briefen überlieferten Werken, von Cicero, der im 1. Jahrhundert vor Christus das Grab gefunden und beschrieben hat, dass die Grabsäule wieder verschollen ging, von den Überlieferungen Plutarchs in der Marcellus-Biographie und von den vielen Legenden die sich um das Leben von Archimedes gebildet haben. Zum Schluss verteile ich eine kurze Übersicht über Leben und Werk dieses genialen Menschen, der nicht umsonst als grösster Mathematiker und Naturwissenschafter des Altertums bekannt ist. Wer weiss, eines Tages taucht ein Text auf mit der Grabinschrift, die noch Cicero aus der Schule bekannt war, oder der Grabstein wird gefunden.

Didaktische Anmerkungen: *Wie erwähnt, ziehe ich es an dieser Stelle vor, die heuristische Methode des Archimedes vorzulesen, wie sie im neu gefundenen Text beschrieben ist, und anschliessend die entsprechende „mechanische“ Herleitung des Kugelvolumens mittels dünner Scheiben, die an einen Waagebalken gehängt werden, zu diskutieren (vgl. dazu z.B. Meschkowski 1984 und Becker 1957). Nehmen wir Quadrat, Kreis und Dreieck der letzten Figur als Risse, so erhalten wir viele der besprochenen Körper und dazu noch ein paar interessante mehr!*

WIE SEHEN KÖRPER MIT UNTENSTEHENDEN RISSEN AUS ?



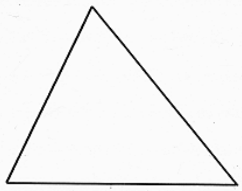




$2 \longrightarrow 3$

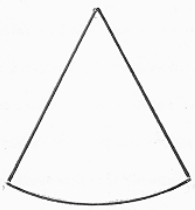
EBENE R^2

DREIECK



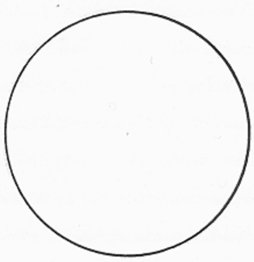
$$F = \frac{gh}{2}$$

SEKTOR



$$F = \frac{br}{2}$$

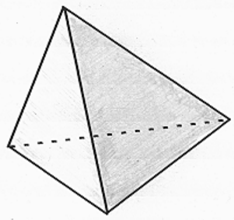
KREIS



$$F = \frac{Ur}{2}$$

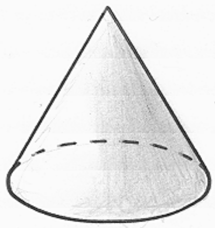
RAUM R^3

PYRAMIDE



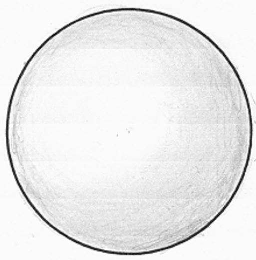
$$V = \frac{Gh}{3}$$

KEGEL



$$V = \frac{Gh}{3}$$

KUGEL

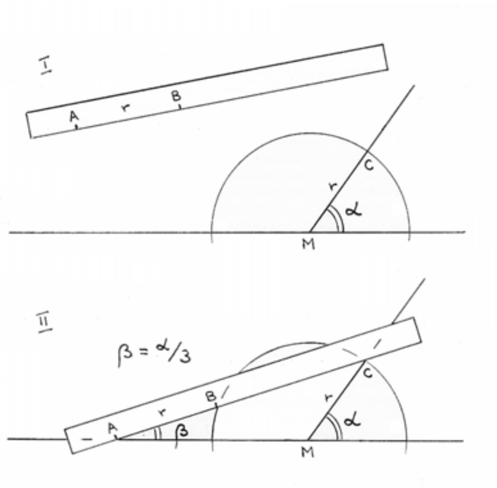


$$V = \frac{Or}{3}$$

$2 \longrightarrow 3$

Am Abend im Dorfrestaurant, es ist nicht die Trattoria Archimede, will Anna doch noch wissen, wie das mit der Dreiteilung des Winkels geht. Ich skizziere ihr die Situation auf einem Bierdeckel, ohne aber den Beweis zu liefern.

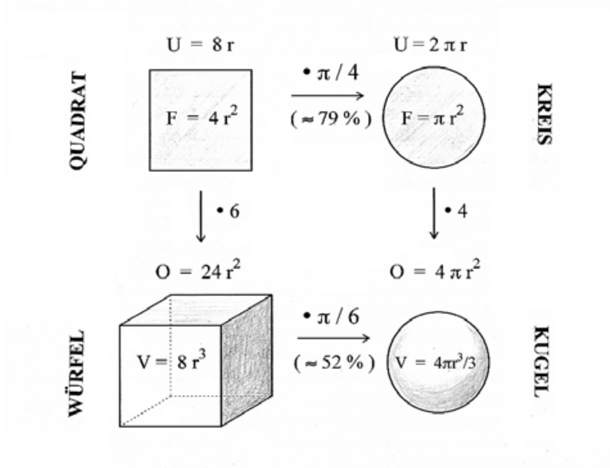
Nach dem Morgensingen bleibt am **Samstag** nur knapp Zeit für den Abschluss. Trotzdem zeige ich allen an der Tafel die „Papierstreifenkonstruktion“ von Archimedes für die Dreiteilung des Winkels. Und wie geht es, wenn der zu teilende Winkel grösser als 90° ist? Die Überlegungen und Begründungen überlasse ich den Schülerinnen und Schülern, eingedenk der Worte von Ruth Cohn (Cohn 1981): „Zu wenig geben ist Diebstahl, zu viel geben ist Mord!“ Aus Zeitgründen habe ich in den letzten zwei Wochen ohnehin eher zuviel gegeben. Leider reicht es zeitlich nicht für eine Übungsserie, um die verschiedenen Formeln und Zusammenhänge anzuwenden.



Ein schriftliches Feedback und eine mündliche Schlussrunde beenden diese zwei Wochen. Zum Wohlwollen und zur Offenheit des Anfangs hat sich noch ein schönes Mass an Vertrauen gesellt. Die Reaktionen sind vergleichbar mit denjenigen aus meinen anderen Kursen. Der „handliche“ Einstieg mit Ton, der sich daraus ergebende logische Ablauf, die vielen Modelle und der Bezug zu Archimedes kommen gut an. Das intensive, vertiefte Arbeiten an einem Thema wird geschätzt, auch wenn die vielen Formeln und Herleitungen, insbesondere die Umformungen und Wurzelrechnungen einzelnen Schülern Mühe bereiten. Dass es schön und sinnvoll sein kann, auf verschiedenen Wegen den gleichen Berg zu erklimmen, können nicht alle Schüler und Schülerinnen verstehen. Die sich ergebenden überraschend einfachen Beziehungen werden aber immer wieder bestaunt. Einige sagen, sie möchten nicht immer so arbeiten, aber ab und zu wieder. Genau das streben wir ja an, einzelne Lerninseln zum vertieften Arbeiten nach Wagenschein.

Rückblick und Ausblick:

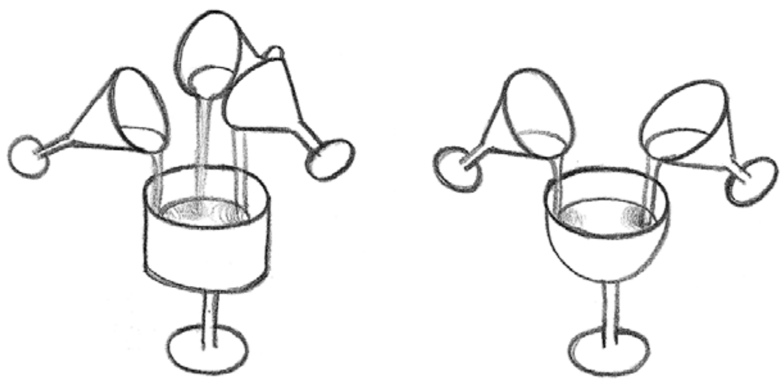
Das Besondere an der Thematik in diesem Lehrstück, ist der Aufstieg aus der klassischen griechischen Mathematik zu einer Sichtweise, die auch Heuristik, Praxis und Annäherung zulässt. Die Anwendung und das praktische Experiment fördern die theoretische Erkenntnis, und diese wiederum erweitert den Bereich der praktischen Anwendungen. Damit verbunden ist das Zulassen von Annäherungen, und erst dies erlaubte es, der Zahl π wesentlich näher zu kommen. Zwar sind in der klassischen konstruktiven Geometrie das Gerade (Lineal) und das Runde (Zirkel) gleichermassen vertreten, aber sobald es um metrische Fragen geht, müssen wir, wenn wir weiterhin die Längeneinheiten auf der Geraden definieren, das Runde durch das Gerade annähern. Und Wagenschein (1965/70 Bd. I, S. 70) schreibt: „Das Gerade und das Krumme sind nun einmal zu einander fremde Welten.“ Die bequemste Stelle, um vom Geraden zum Krummen zu gelangen ist der Kreis. „π ist also der Umfang, gemessen am Durchmesser; das Krumme, gemessen am Geraden.“ (ebd. S. 68) Und ist dieser komplizierte Übergang einmal erlebt, so sind die Zusammenhänge wieder einfach: „Bleibt man bei den runden Dingen und setzt diese untereinander in Beziehung, so finden sich die einfachsten Verhältnisse, die es gibt: die der ganzen Zahlen!“ Und je länger man sich mit der Anschauung der Formeln befasst, desto mehr Zusammenhänge offenbaren sich, neue Verbindungen öffnen sich, andere Darstellungen drängen sich auf.



Bezogen auf unsere Ausgangsfiguren lässt sich leicht überprüfen, was Wagenschein (ebd. S. 72) so formuliert: „Bei Kreis und umschriebenem Quadrat verhalten sich die Umfänge ebenso wie die Flächen (nämlich wie π zu 4), und bei Kugel und umschriebenem Würfel verhalten sich ebenfalls die Oberflächen wie die Rauminhalte (nämlich wie π zu 6).“

Mit dem Lehrstück haben wir jetzt das „weite Feld“ beackert, die mathematischen Zusammenhänge ergründet und die Ergebnisse in der Anschauung gewürdigt. Bezüglich der mathematischen Anforderungen haben wir einen Mittelweg gewählt: In einer unteren Stufe würde ich noch mehr mit Experimenten arbeiten (Beispiele sind zu finden in Wagenschein, 1965/70), auf einer höheren Stufe den Grenzprozess präziser fassen und vermehrt ins Zentrum stellen. Im ganzen Verlauf des Stücks hat sich immer wieder gezeigt, wie wichtig das Beherrschen der mathematischen Grundlagen ist: Satz des Pythagoras, Ähnlichkeitslehre, Proportionen, lineare Gleichungen, Umgang mit Wurzeln. In der thematischen Landkarte habe ich deshalb diese Aspekte ebenfalls berücksichtigt. Gleichzeitig ist das Lehrstück ein hervorragendes Übungsfeld für diese Grundlagen. Wer sie nicht einigermassen beherrscht, erlebt sie als Stolpersteine.

Mit dem Lehrstück legen wir einen weiten Weg zurück. Die Formen werden transformiert, das Denken findet Wege, die Zusammenhänge zu formulieren, die in der Kurzschrift der Formeln ihre endgültige mathematische Gestalt annehmen. Mit den Formeln werden die Denkwege fahrbar.



3.4 Weiterentwicklungen des Lehrstücks

Anschliessend an die Publikation meines Lehrstücks im Berner Lehrkunstband befasste sich David Kamber von der Berufsmaturitätsschule Bern (BMS) im Rahmen der III. Berner Lehrkunstwerkstatt mit diesem Thema. Konzept und Durchführung sind nachzulesen in Kamber (2001, S. 41-57). Die einbezogene Klasse besteht aus Informatiklehrlingen. Da für die Mathematik nur eine Doppellektion pro Woche zur Verfügung steht, muss sich Herr Kamber auf 6 Doppellektionen beschränken.

I. Akt: Die Familie von Würfel und Kugel
Bilder von Archimedes werden projiziert, er soll ständiger Begleiter sein. Der Einstieg beginnt mit zwei vorgegebenen Körpern, einer Tomate und einem getrockneten Tonwürfel. Dann werden von den Schülern aus Ton „Verwandte" hergestellt. Um Ordnung zu schaffen hilft Herr Kamber mit einem runden und einem eckigen Papier. Karten mit Namen sind vorbereitet und dienen zur präziseren Beschreibung und Unterscheidung der Körper. Informationen über Archimedes beschliessen die Doppelstunde.

II. Akt: Phänomen Formeln
In diesem zweiten Akt stehen Formeln im Zentrum. Formeln auf Kärtchen sollen in einer Tabelle untergebracht werden. Diese Zuordnung führt zur Reflexion der Formeln, zu Diskussionen und in dieser Inszenierung zu intensiverer Klärung der Mantelfläche. Dann wird vom Lehrer die Grösse π als Hüter zwischen eckig und rund angesprochen. Der Versuch, Formeln zu betrachten, zu vergleichen und den anschaulichen Gehalt erfassen zu lassen, findet bei den Lehrlingen wenig Resonanz.

III. Akt: Das Krumme gemessen am Geraden, π
Die Schüler werden aufgefordert, π in Kürze zu erklären, so dass auch Laien es verstehen können. Dass der Umfang dreimal der Durchmesser und etwas mehr ist, wird anschaulich klar. Aber wie viel mehr? Über den Satz des Archimedes wird jetzt die berühmte Ungleichung aufgestellt, welche erstmals eine klare Eingrenzung für π vorgibt. Mit einem Arbeitsblatt werden die Rekursionsformeln für die innere und äussere Annäherung erarbeitet. Zu Hause zeigt sich deren Nützlichkeit in einem Tabellenkalkulationsprogramm.

IV. Akt: Scheibenkörper, der Aufstieg in die 3. Dimension
Die Formeln werden gut umgesetzt und führen auf ein Gespräch um die Grenzen der Genauigkeit bei Computern. Der Überblick „Die Zahl π im Laufe der Zeit" verweist auf die historische Dimension. Der Einstieg in den Raum erfolgt über das Prinzip von Cavalieri. Damit werden nach und nach einige Formeln verständlicher und der Ton als Medium kommt wieder ins Spiel.

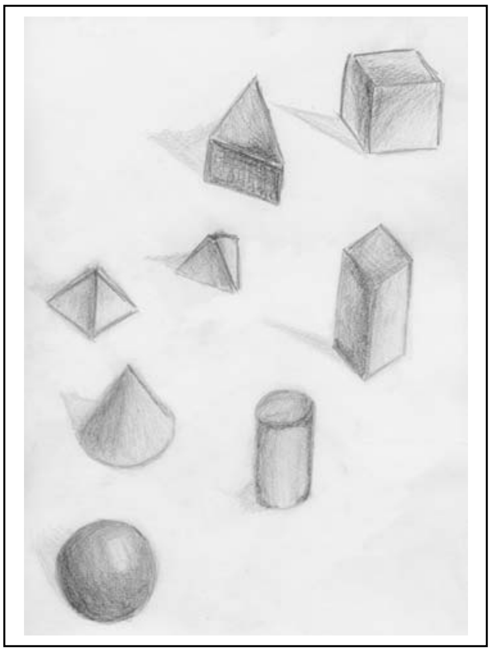
V. Das Kugelvolumen
Mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri und Demonstrationsmodellen aus Plexiglas wird das Volumen der Kugel hergeleitet. Trotz Modellen und Arbeitsblatt folgt die Erkenntnis nur zögernd. Schoggikugel und Kugeloberfläche sind als Hausaufgabe angesagt.

VI. Akt: Rückblick und Abschluss
Vorerst wird die Frage nach der Kugeloberfläche bereinigt. Erstaunen gibt es über die Tatsache, dass der Mantel des Zylinders und die Oberfläche der einbeschriebenen Kugel gleich gross sind. Statt einer Vertiefung mit Archimedes beendet Herr Kamber das Lehrstück mit einer Aufgabe über ineinander geschachtelte Würfel und Kugeln.

Herr Kamber hat es nicht leicht, seine Schüler während zwölf Lektionen für Körper und Formeln zu motivieren. Die Idee gefällt mir, Archimedes von Anfang an bis am Schluss präsent zu halten. Vielleicht könnte dies noch konsequenter und organischer geschehen. Die Zuordnung von Formeln in die Tabelle, auch wenn nicht genetisch, habe ich inzwischen in mein Lehrstück aufgenommen. Tabelle und Körperfamilie dienen als Basislager für den weiteren Verlauf, werden zum Ausgangspunkt von Fragestellungen und Streitgesprächen. Mit dem Kegelmantel steigt die Klasse allerdings in eine der schwierigeren Fragen ein, begegnet bereits dem Übergang von gerade zu rund. Müsste nicht dieser Übergang hier vertieft werden? Und dann könnte der eine oder andere Satz von Archimedes folgen. So kompliziert sind sie nicht. Der zentrale dritte Akt gefällt mir sehr gut. Er führt mit Intervallschachtelung und Rekursion zu relevanten Themen und fordert die Informatiklehrlinge heraus. Das Cavalieri-Prinzip kommt wie von einem anderen Stern. Warum nicht (mit oder ohne Auftritt von Archimedes) erklären, mit welchen Ideen der Meister das Volumen der Kugel bestimmt hat: Zylinder, Halbkugel und Kegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe schneiden und an einer Balkenwaage aufgehängt denken. Zwar ist es nicht so von Archimedes überliefert, aber alle Ideen sind von ihm und heute würde er die Herleitung des Kugelvolumens den Schülern sicher so erklären und bemerken, dass Herr Cavalieri dieses Grundgesetz später verallgemeinert hat. Und dann, mit diesem Verfahren von Archimedes und Cavalieri lassen sich die Volumina von Pyramide, Kegel und schiefen Körpern erarbeiten. Die Quintessenz im Verhältnis zwischen Zylinder und einbeschriebener Kugel, formuliert als Satz von Archimedes, dürfte dann aber nicht fehlen. Die Schlussaufgabe, auch wenn etwas anspruchsvoll, vereint das Urpaar des Lehrstücks vortrefflich: Vom Würfel zur Kugel zum Würfel zur Kugel . . .

Ich habe von dieser Lehrstückinszenierung viel gelernt. Es ist eine kompakte Form, die sich noch optimieren lässt und ich wünsche Herrn Kamber für nächste Inszenierungen offenere Schüler.

Seit meiner Inszenierung in Goldern habe ich das Lehrstück achtmal am Wirtschaftsgymnasium in Bern durchgeführt. Insbesondere durch die Arbeit von David Kamber hat sich bei mir einiges geändert. Um zu zeigen, wie sich dieses Lehrstück im Laufe der Jahre verändert und angereichert hat, möchte ich jetzt von meiner letzten Durchführung mit der Quarta 4A im Mai bis Juli 2003 berichten.



Nach kurzem **Auftakt** mit dem „Sandrechner“ steigen wir direkt ein in den

I. Akt: Exposition des Lehrstücks: Würfel, Kugel und Verwandte

Da ein Kollege in der Chemie gerade mit Halbklassen ins Kerzenlehrstück einsteigt, kann ich in Doppellektionen den Einstieg in mein Lehrstück durchführen, was doch viel angenehmer ist, zumal diese Klasse 22 Schüler und Schülerinnen umfasst. Die erste Lektion gestalte ich wie üblich: Körper werden gebildet aus Ton, wir suchen ihre Verwandtschaften und besprechen ihre Namen und Eigenschaften. Dazu betrachten wir einige Körper aus der Natur und aus unserem Umfeld. Zu Beginn der zweiten Lektion lege ich die Platte mit den Körpern auf den Boden, verteile Zeichnungsblätter und lasse die Schüler die ganze Körper-gruppe abzeichnen, jedes aus seiner Perspektive. Dadurch entsteht eine zusätzliche Bekanntheit und Vertrautheit mit diesen Körpern. Einige Schülerinnen notieren sich sogar dabei noch die Namen der entsprechenden Körper. Im Anschluss an dieses Zeichnen, das sehr unterschiedlich lange dauert, befinden sich auf den umliegenden Tischgruppen unausgefüllte Formeltabellen und dabei ein Blatt mit sehr vielen Formeln. Die richtigen Formeln sollen ausgesucht und in die Tabelle eingefüllt werden. So entstehen bereits erste Gespräche über Körper und Formeln. Bis zum Ende der zweiten Lektion sind die Tabellen soweit möglich ausgefüllt. Ich kündige an, dass wir in den nächsten Lektionen genauer um die Zusammenhänge zwischen den Körpern und zwischen den Formeln kümmern werden mit der generellen Richtung: „Vom Würfel zur Kugel“.

FORMEL TABELLE	UMFANG	(OBER)-FLÄCHE	VOLUMEN
QUADRAT			———
KREIS			———
WÜRFEL	———		
QUADER	———		
PYRAMIDE	———		
DREHZYLINDER	———		
DREHKEGEL	———		
KUGEL	———		

πr^2 $\pi r^2 h$ πr^3 $2\pi r^3$ $3\pi r^3$

$2\pi r^2+2\pi rh$ $\pi r^2+\pi rs$ abc

$4a$ $6a^2$ a^2 a^3 $G\cdot h$

$2\pi rh$ πrs $2\pi r(r+s)$

$2(r+s)$ $2\pi r(r+h)$ $2(2r+h)$

$\pi r^2 h/2$ $2(ab + ac + bc)$

$\pi r^2 h/3$ $4\pi r^3/3$ $4\pi r^3/5$

2π $2\pi r$ $2\pi r^2$ $4\pi r^2$ $G + M$

II. Akt: Im Eckenland: Vom Würfel zu Quader, Prisma und Pyramide

Der Verlauf ist derselbe geblieben, nur führe ich die Verallgemeinerung der Pyramidenformel mit der Ähnlichkeit nicht durch. Wenn nötig, kann später mit dem Prinzip von Cavalieri die Ergänzung folgen. Sehr wichtig sind mir immer die Übungen mit den regelmässigen Körpern im Würfel. Anschauung, Wurzelgesetze und Satz des Pythagoras lassen sich üben und es zeigen sich schöne Körper und einfache Formeln, die auf innere Zusammenhänge zwischen diesen Körpern hinweisen.

III. Akt: Der Kreis in der Ebene als Steg über die Kluft

Auch hier gibt es einen ähnlichen Verlauf wie in Goldern. Das Zeichnen im Sand spare ich auf später. Etwas mehr Gewicht lege ich heute auf das Verstehen der drei Sätze von Archimedes aus der „Kreismessung“ (nach Archimedes 1798, S. 101ff):

Satz 1: Jeder Kreis ist gleich einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem die eine Seite beim rechten Winkel gleich dem Radius und die andere gleich dem Umfang des Kreises ist.

Satz 2: Der Kreis verhält sich zum Quadrat seines Durchmessers sehr nahe wie 11 zu 14.

Satz 3: Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so gross wie der Durchmesser und noch etwas grösser, nämlich um weniger als 1/7 des Durchmessers, aber um mehr als 10/71.

Das Bestimmen der Rekursionsformel bedarf auch in Bern gewisser Hilfe. Dafür geniessen wir umso mehr die eindrücklichen Wurzelausdrücke. Ich erlebe immer wieder einzelne Schüler, die die Annäherungstabelle für π mit einem Tabellenkalkulationsprogramm bewältigen. Natürlich stossen wir dann wie die Klasse von Herrn Kamber an die Grenzen des Computers.

$$\pi \approx 1024 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}}$$

IV. Akt: Im Rundland: Über Zylinder und Kegel zur Kugel

Beim geraden Zylinder ist wieder die Einschachtelung im Zentrum. Beim Kegel erwähne ich sie nur kurz und gehe zügig zur Trichteraufgabe über:

Stelle einen kegelförmigen Trichter her mit möglichst genau 250 cm^3 Inhalt!

Zur Verfügung stehen Papier, Schere, Leimstift und Klebstreifen. Es ist eine halboffene Fragestellung, die verschiedene Lösungswege und Resultate zulässt. Der Zusammenhang zwischen dem Kegel und der Abwicklung seines Mantels muss dabei erst entdeckt und analysiert werden. Zur individuellen Kontrolle hänge ich zwei Tabellen an die Tafel. In idealer Verbindung können da Kopf und Hand tätig werden. Die Resultate tragen wir zusammen, vergleichen sie und fragen nach den gefundenen inneren Zusammenhängen, die sich in Formeln ausdrücken lassen.

h[cm]	r [cm]	s[cm]	Zentriwinkel
1	15.451	15.483	359.25°
2	10.925	11.107	354.12°
3	8.921	9.412	341.22°
4	7.725	8.700	319.69°
5	6.910	8.529	291.65°
6	6.308	8.706	260.84°
7	5.840	9.116	230.62°
8	5.463	9.687	203.01°
9	5.150	10.369	178.81°
10	4.886	11.130	158.04°
11	4.659	11.946	140.39°
12	4.460	12.802	125.43°
13	4.285	13.688	112.71°
14	4.129	14.596	101.85°
15	3.989	15.521	92.53°

r[cm]	h[cm]	s[cm]	Zentriwinkel
1	238.732	238.735	1.51°
2	59.683	59.717	12.06°
3	26.526	26.695	40.46°
4	14.921	15.448	93.22°
5	9.549	10.779	166.99°
6	6.631	8.943	241.53°
7	4.872	8.529	295.48°
8	3.730	8.827	326.27°
9	2.947	9.470	342.12°
10	2.387	10.281	350.16°
11	1.973	11.176	354.35°
12	1.658	12.114	356.61°
13	1.413	13.077	357.89°
14	1.218	14.053	358.65°
15	1.061	15.037	359.10°

Aus $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ folgt durch Auflösen: Radius $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi \cdot h}}$ Höhe $h = \frac{3V}{\pi \cdot r^2}$

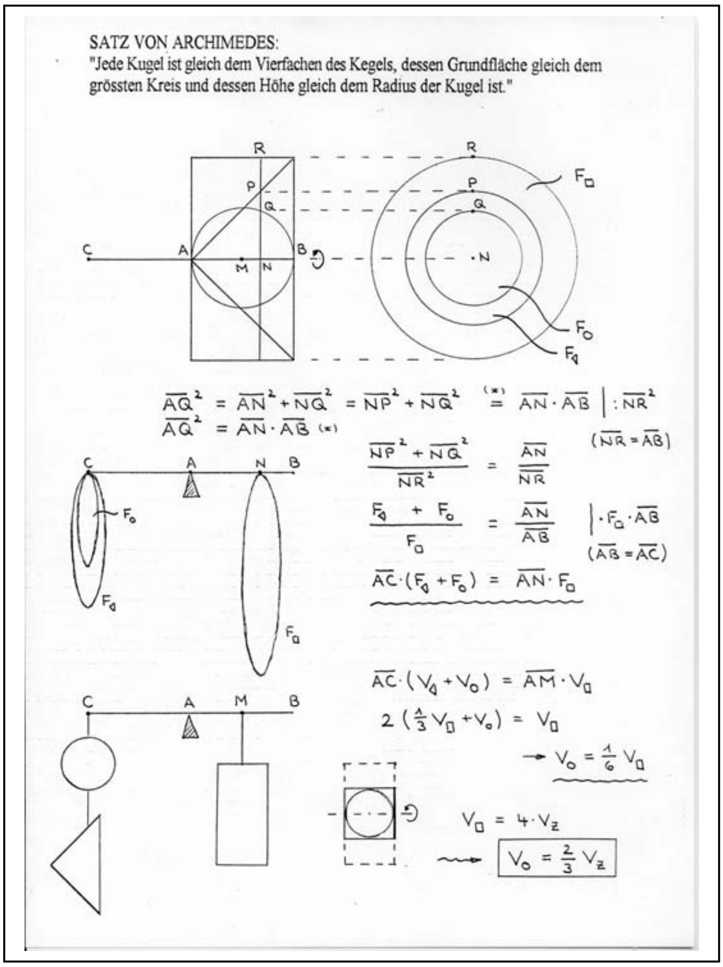
Mantellinie $s = \sqrt{r^2 + h^2}$

Aus $\alpha : 360° = 2\pi r : 2\pi s = r : s$ folgt Zentriwinkel $\alpha = \frac{r}{s} \cdot 360°$

In einer Zusatzaufgabe geht es um den Trichter, bei dem Radius und Höhe gleich gross sind, also $r = h$. Es ergibt sich $r = h = \sqrt[3]{3V/\pi} = 6.2035$ cm, $s = 8.773$ cm, und $\alpha = 254.6°$

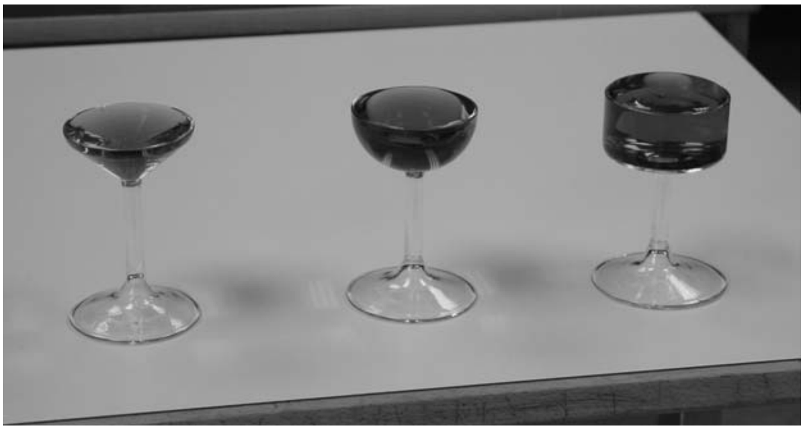
Nachdem die Behandlung von Zylinder und Kegel abgeschlossen sind, trete ich unerwartet als Archimedes im Bademantel auf. Vor ihm am Boden liegt ein flaches Becken mit Sand von Syrakus. „Sehr verehrte Schülerinnen und Schüler. Ich habe gehört, dass Sie sich seit einiger Zeit mit den Eigenschaften von Körpern befassen. Da ich mich selbst vor über 2200 Jahren damit auseinandergesetzt habe und sehr stolz bin auf meine damaligen Entdeckungen und Herleitungen, von denen ja heute noch gesprochen wird, möchte ich Ihnen heute gerne von mir und meinen Arbeiten erzählen. Fast mein ganzes Leben habe ich in Syrakus auf Sizilien verbracht. Zu Studienzwecken reiste ich, wie damals die meisten der gebildeten Leute, für einige Jahre ins grosse Wissenszentrum Alexandria. Ich war gut befreundet mit dem König Hieron und habe öfters von ihm Aufträge erhalten. Einmal habe ich, um die Zahl der Sandkörner zu bestimmen, Zahlen bis fast ins Unendliche erfunden, ein andermal musste ich herausfinden, ob eine Krone aus purem Gold bestehe. In der Badewanne entwickelte ich beim darüber Nachdenken das Auftriebsprinzip und soll anschliessend splitternackt und „Heureka“ (Ich hab’s gefunden) rufend durch Syrakus zum König geeilt sein. Weiter erfand ich eine Schraube, um Flüssigkeit auf ein höheres Niveau zu heben, formulierte das Hebelgesetz genau und entwickelte für den König die verschiedensten Kriegsgeräte wie z.B. Wurfmaschinen, damit wir uns gegen die Römer wehren konnten. Ich hielt mich tagelang am Strand auf, dachte nach und malte und geometrische Figuren in den Sand. Über Experimente und durch intensives Nachdenken gelangte ich schliesslich zur Bestimmung von Volumen und Oberfläche der Kugel. Übrigens sind die meisten meiner Schriften heute noch zu lesen.“ Archimedes hält das Buch mit den „Abhandlungen“ in die Höhe. An der Waage entdecken wir gemeinsam experimentell das Volumenverhältnis 3 : 2 : 1 zwischen Zylinder, Halbkugel und Kegel mit gleichem Grundkreis und gleicher Höhe. „Und jetzt will ich Ihnen erläutern, wie ich das Volumen der Kugel begründet habe. Ich lieferte die Begründung auf verschiedene Arten. Meine abstrakteste überlassen wir den reinen Mathematikern.“ Unter Einbezug seines Hebelgesetzes erläutert jetzt Archimedes ausführlich an der Tafel, Schritt für Schritt. Die Anwesenden bittet er, gut zuzuhören, mitzudenken und nachzuvollziehen. Er wählt dabei eine Darstellung, wie wir sie etwa bei van der Waerden (1966, S. 356ff) finden. „Auf diese meine Entdeckungen und Darstellungen über Kugel und Zylinder bin ich am meisten Stolz. Zudem freue ich mich, dass man nach über 2200 Jahren immer noch von mir spricht als bedeutendem Mathematiker und grösstem Naturwissenschaftler des Altertums. Ich bedanke mich für die Aufmerksamkeit und wünsche Ihnen noch viele wundervolle Erkenntnisse im Reiche der runden Körper.“ Archimedes zieht sich zurück. Es folgt eine Pause.

In der zweiten Lektion bleibt viel Zeit, um den Gedankengängen des Meisters nochmals nachzugehen und sich die Herleitung des Kugelvolumens Schritt für Schritt anzueignen.



Es zeigt sich allerdings, dass mehrere Schüler diese Tour nicht eigenständig nochmals klettern wollen, wohl auch den Erläuterungen von Archimedes zu wenig konzentriert gefolgt sind. Lieber befassen sie sich bereits mit den Aufgaben einer ausgedehnten Übungsserie. Später folgen die Kugeloberfläche (mit der in der Goldernfassung beschriebenen Methode, aber in umgekehrter Richtung) und die schönen Beziehungen zwischen den Körpern samt dem Umschütten von Wasser mit den drei Gläsern.

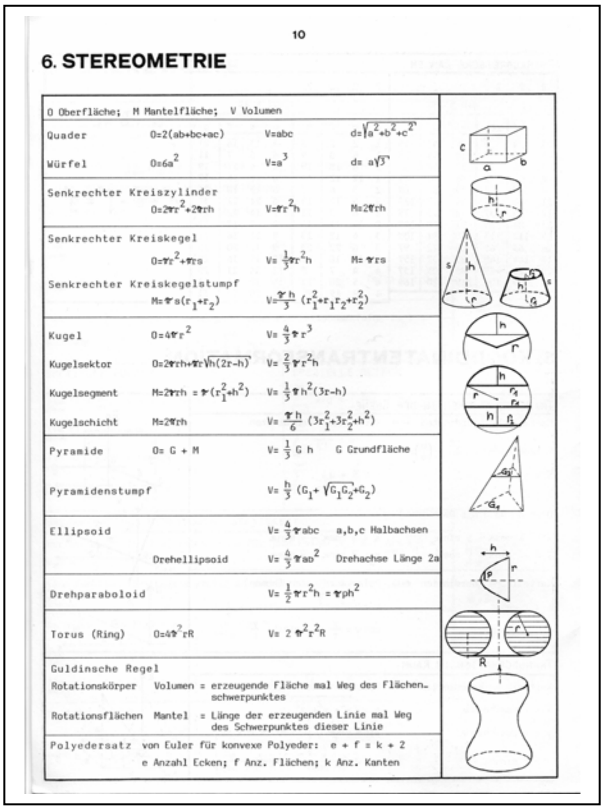
Anmerkung: *Auf Grund der Erfahrungen und Einwände, ja Vorwürfe in den Feedbacks, muss ich mir überlegen, ob ich das nächste Mal als Archimedes eine noch einfachere Herleitung des Kugelvolumens präsentieren soll. Zylinder, Halbkugel und Kegel, alle mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, können horizontal geschnitten und in die Schalen einer Waage gelegt werden. Zwar hat es Archimedes nicht so gemacht, aber die Präsentation wäre insofern genetisch echt, als alle wesentlichen Ideen von ihm stammen und ich bin sicher, er würde seine Herleitung in einfachster Variante heute so darstellen. Archimedes würde dann genau das zeigen, was wir experimentell an der Waage bereits gefunden haben, nämlich dass Halbkugel und Kegel den Zylinder aufwiegen. Verallgemeinerung würde uns fast automatisch zum Prinzip von Cavalieri führen.*



Abschluss: Nach- und Schlussbetrachtung

Zum Abschluss verteile ich nochmals eine leere Formeltabelle. Anhand der Heftunterlagen kann sie leicht korrekt ausgefüllt werden. Anschliessend verteile ich eine kleine Formelsammlung (Formelsammlung Mathematik, Neue Kantonsschule, 5000 Aarau), die ab sofort jederzeit konsultiert werden darf, auch in den Proben. Wir betrachten die entsprechende Seite mit vielen der vertrauten Formeln. Die Schüler sind begeistert! Damit schliesst sich der Bogen zur Entstehung der Körper und zur Formelsammlung in der ersten Doppelstunde. Die Körper der ersten Lektion waren übrigens in jeder Lektion anwesend und sie liegen auch jetzt vor uns.

Das Formelchaos ist zu einer erarbeiteten und (mehr oder weniger vertrauten) Formelordnung geworden. Wir denken an Wagenscheins Formelsammlung (1965, S. 67) und hoffen, dass die selbst erstellte sowie die ausgeteilte Tabelle mit den Formeln als „Kurzschrift für höchst anschauliche und merkwürdige Zusammenhänge“ für die Schülerinnen und Schüler nichts „Trockenes und Abschreckendes“ mehr beinhalten.

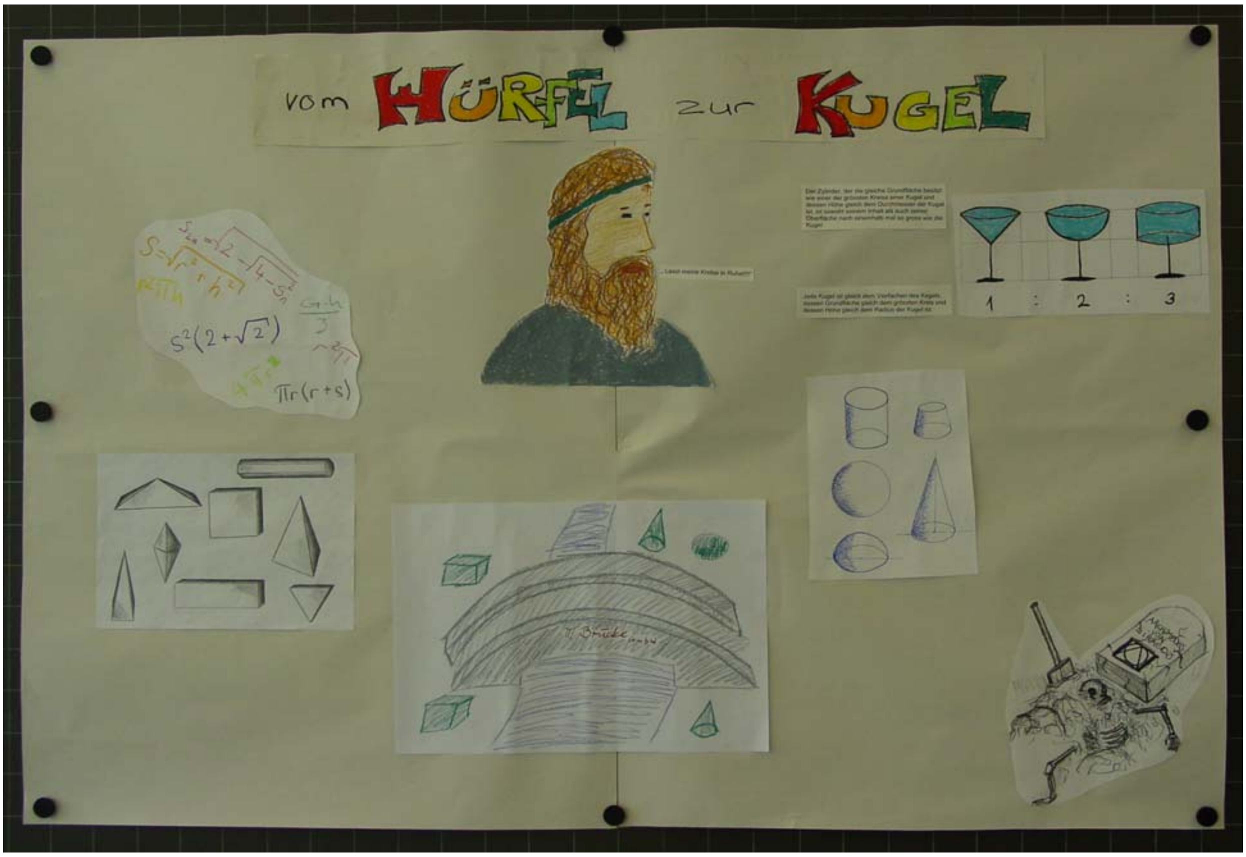


10

6. STEREOMETRIE

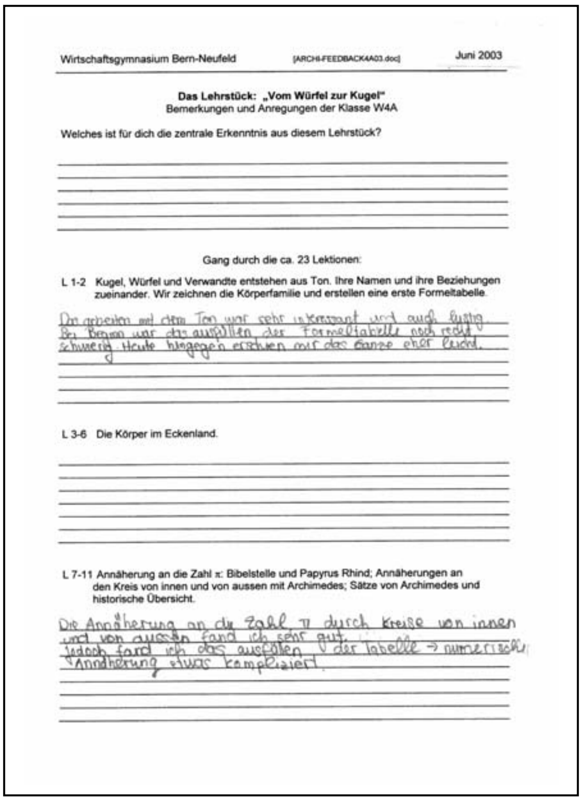
O Oberfläche; M Mantelfläche; V Volumen			
Quader	$O=2(ab+bc+ac)$	$V=abc$	$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Würfel	$O=6a^2$	$V=a^3$	$d=a\sqrt{3}$
Senkrechter Kreiszylinder	$O=2\pi r^2+2\pi rh$	$V=\pi r^2 h$	$M=2\pi rh$
Senkrechter Kreiskegel	$O=\pi r^2+\pi rs$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$M=\pi rs$
Senkrechter Kreiskegelstumpf	$M=\pi s(r_1+r_2)$	$V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_1 r_2+r_2^2)$	
Kugel	$O=4\pi r^2$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	
Kugelsektor	$O=2\pi rh+\pi r\sqrt{h(2r-h)}$	$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h$	
Kugelsegment	$M=2\pi rh=\pi(r_1^2+h^2)$	$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$	
Kugelschicht	$M=2\pi rh$	$V=\frac{\pi h}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$	
Pyramide	$O=G+M$	$V=\frac{1}{3}G\,h$	G Grundfläche
Pyramidenstumpf		$V=\frac{h}{3}(G_1+\sqrt{G_1 G_2}+G_2)$	
Ellipsoid		$V=\frac{4}{3}\pi abc$	a,b,c Halbachsen
	Drehellipsoid	$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$	Drehachse Länge 2a
Drehparaboloid		$V=\frac{1}{2}\pi r^2 h=\pi p h^2$	
Torus (Ring)	$O=4\pi^2 rR$	$V=2\pi^2 r^2 R$	
Guldinsche Regel			
Rotationskörper	Volumen = erzeugende Fläche mal Weg des Flächenschwerpunktes		
Rotationsflächen	Mantel = Länge der erzeugenden Linie mal Weg des Schwerpunktes dieser Linie		
Polyedersatz	von Euler für konvexe Polyeder: $e+f=k+2$		
	e Anzahl Ecken; f Anz. Flächen; k Anz. Kanten		

Zum Abschluss gehört noch ein gemeinsamer Rückblick. Dieser hilft beim Ausfüllen des Feedback-Fragebogens und soll in ein Poster münden, das den Gang durch das Lehrstück festhält. Nach dem gemeinsamen Rückblick und dem Ausfüllen des Fragebogens bitte ich die Schülerinnen und Schüler, einzeln auf einem Blatt A4 quer den Verlauf des Lehrstücks mit seinen wichtigsten Stationen zu zeichnen. In der folgenden Lektion werden die einzelnen Darstellungen präsentiert und in der Diskussion entwerfen wir gemeinsam ein grosses Posterbild. Aufträge werden verteilt und schliesslich, trotz Motivationsrückgang und einer Konzertaufführung, welche die nötigen Lektionen beansprucht, kommt das Werk nach den Sommerferien doch noch zur Vollendung.



3.5 Feedback der Schüler zum Lehrstück

Der ausgeteilte Fragebogen weist eine starke Gliederung nach Akten auf, denn in diesem Lehrstück lassen sich die verschiedenen Akte in der Wahrnehmung und in der Erinnerung recht deutlich unterscheiden. Allerdings ging ich mit meiner ersten Frage zunächst aufs Ganze: Gibt es eine zentrale Erkenntnis, quasi eine Quintessenz aus diesem Lehrstück? Dann folge ich den Akten und schliesslich gibt es wieder eine offene Frage, die das ganze Lehrstück betrifft. Da der Fragebogen überwiegend anonym abgegeben wurde, habe ich die Namen generell weggelassen.


Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [ARCHI-FEEDBACK4A03.doc] Juni 2003

Das Lehrstück: „Vom Würfel zur Kugel"
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4A

Welches ist für dich die zentrale Erkenntnis aus diesem Lehrstück?

Gang durch die ca. 23 Lektionen:

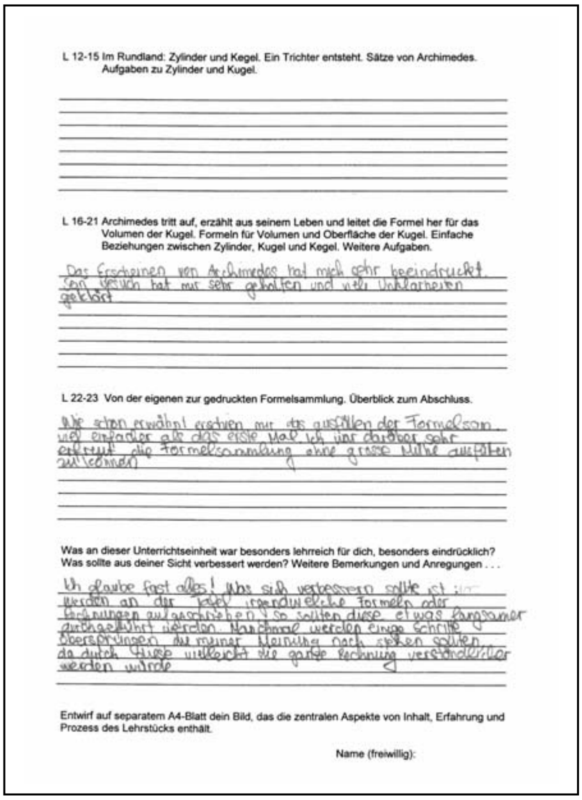
L 1-2 Kugel, Würfel und Verwandte entstehen aus Ton. Ihre Namen und ihre Beziehungen zueinander. Wir zeichnen die Körperfamilie und erstellen eine erste Formeltabelle.

Das arbeiten mit dem Ton war sehr interessant und auch lustig. Bei Beginn war das ausfüllen der Formeltabelle noch recht schwierig. Heute hingegen erschien mir das Ganze eher leicht.

L 3-6 Die Körper im Eckenland.

L 7-11 Annäherung an die Zahl π: Bibelstelle und Papyrus Rhind; Annäherungen an den Kreis von innen und von aussen mit Archimedes; Sätze von Archimedes und historische Übersicht.

Die Annäherung an die Zahl π durch Kreise von innen und von aussen fand ich sehr gut. Jedoch fand ich das ausfüllen der Tabelle → numerische Annäherung etwas kompliziert.


L 12-15 Im Rundland: Zylinder und Kegel. Ein Trichter entsteht. Sätze von Archimedes. Aufgaben zu Zylinder und Kugel.

L 16-21 Archimedes tritt auf, erzählt aus seinem Leben und leitet die Formel her für das Volumen der Kugel. Formeln für Volumen und Oberfläche der Kugel. Einfache Beziehungen zwischen Zylinder, Kugel und Kegel. Weitere Aufgaben.

Das Erscheinen von Archimedes hat mich sehr beeindruckt. Sein Besuch hat mir sehr geholfen und viele Unklarheiten geklärt.

L 22-23 Von der eigenen zur gedruckten Formelsammlung. Überblick zum Abschluss.

Wie schon erwähnt erschien mir das ausfüllen der Formelsam. viel einfacher als das erste Mal. Ich war darüber sehr erfreut die Formelsammlung ohne grosse Mühe ausfüllen zu können.

Was an dieser Unterrichtseinheit war besonders lehrreich für dich, besonders eindrücklich? Was sollte aus deiner Sicht verbessert werden? Weitere Bemerkungen und Anregungen . . .

Ich glaube fast alles! Was sich verbessern sollte ist: wenn werden an der Tafel irgendwelche Formeln oder Rechnungen aufgeschrieben, so sollten diese etwas langsamer durchgeführt werden. Manchmal werden einige Schritte übersprungen die meiner Meinung nach stehen sollten, da durch diese vielleicht die ganze Rechnung verständlicher werden würde.

Entwirf auf separatem A4-Blatt dein Bild, das die zentralen Aspekte von Inhalt, Erfahrung und Prozess des Lehrstücks enthält.

Name (freiwillig):

Welches ist für dich die zentrale Erkenntnis aus diesem Lehrstück?
Zuerst frage ich nach der zentralen Erkenntnis, wünsche den Blick auf das Wesentliche. Es wird bereits hier selbstverständlich vom Eckenland und vom Rundland gesprochen. Diese Strukturierung scheint evident. DD schreibt: „Die Stereometrie war für mich früher etwas, das ich mir sehr kompliziert vorgestellt habe. Doch jetzt, da ich mitten im Thema war, hat mich fasziniert, wie simpel z. T. die Zusammenhänge zwischen Flächen und Körpern darzustellen sind." Diese vielfältigen Zusammenhänge werden oft erwähnt. Kurz und bündig von UU: „Alles hängt mit allem ZUSAMMEN!" Für viele steht die Annäherung an die Zahl π im Blickpunkt. CC: „Ich verstehe nun π, den Zusammenhang zwischen Ecken- und Rundland." Für II ist besonders wichtig: "Dass ich die Formeln nachvollziehen kann. (Formeln der Stereometrie)" Damit sind im Bereich der zentralen Erkenntnis mindestens vier der Grundideen der Mathematik, nämlich die inneren Zusammenhänge [1], das räumliche Strukturieren [6], die Bedeutung der Formeln [7] und der Grenzprozess [9] angesprochen.

Das Lehrstück: „Vom Würfel zur Kugel“

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4A vom 2. Juni 2003

	Welches ist für dich die zentrale Erkenntnis aus diesem Lehrstück?	Kugel, Würfel und Verwandte entstehen aus Ton. Ihre Namen und ihre Beziehungen zueinander. Wir zeichnen die Körperfamilie und erstellen eine erste Formeltabelle.	Die Körper im Eckenland.	Annäherung an die Zahl π: Bibelstelle und Papyrus Rhind; Annäherungen an den Kreis von innen und aussen mit Archimedes; Sätze von Archimedes und historische Übersicht.	Im Rundland: Zylinder und Kegel. Ein Trichter entsteht. Sätze von Archimedes. Aufgaben zu Zylinder und Kegel.	Archimedes tritt auf, erzählt aus seinem Leben, leitet die Formel her für das Volumen der Kugel. Formeln für Volumen und Oberfläche der Kugel. Einfache Beziehungen zwischen Zylinder, Kugel und Kegel. Weitere Aufgaben.	Von der eigenen zur gedruckten Formelsammlung. Überblick zum Abschluss.	Was an dieser Unterrichtseinheit war besonders lehrreich für dich, besonders eindrücklich? Was sollte aus deiner Sicht verbessert werden? Weitere Bemerkungen und Anregungen ...
AA	Dass man durch Einschachtelung der Kugel zu verschiedenen Erkenntnissen kommt.	Das war gut. Hat mir gefallen. Die Tabelle war vielleicht ein bisschen früh.	Bei mir war es so, dass längere Erklärungen mir besser geholfen hätten.	Es war interessant, mal eine historische Übersicht zu bekommen. Diese Annäherung war auch gut. So konnte man das Ganze besser verstehen.	Basteln war eine willkommene Abwechslung. Gut!	Das ging zu schnell mit Archimedes. Das mit dem Verhältnis 3:2:1 war recht eindrücklich.	Freude über die erste Formelsammlung! Guter Abschluss.	Das mit den Gläsern (Zylinder, Kugel, Kegel) war wirklich cool. Als Archimedes da war, fand ich, dass er einfach den Stoff „durchzwängen“ wollte. Dann in der 2. Lektion wurden seine Gedankengänge zum Glück noch erklärt! Weiter so! Bitte ein bisschen länger, eingehender, einfacher erklären.
BB	Vor diesem Lehrstück hätte ich nicht gedacht, dass das Eckenland in so enger Verbindung zum Rundland steht, wie man es zum Beispiel an π sieht, welches man schon früher mit einbeschriebenen und umschriebenen Vielecken ausrechnete …	Ich fand diesen Einstieg gut, denn er gab mir einen groben Überblick und zeigte mir die Unterschiede zwischen dem Ecken- und dem Rundland.	Als wir zum ersten Mal etwas von den Tetraedern, Oktaedern und Kuboktaedern hörten, war ich ziemlich überfordert. Ich musste auch nebst den weiteren Erklärungen mich noch einige Male damit befassen, bis ich es wirklich begriffen hatte.	Siehe erste Antwort. Ich fand gut, dass wir uns damit einige zeitlang befasst hatten und daran arbeiten konnten.	Ich hatte mich dank dem Eckenland schon etwas mit ähnlichen Körpern und Formen befasst, was mir etwas weitergeholfen hat.	Schaffte mir auch wieder einen guten Überblick.	In der eigenen Formelsammlung war eigentlich schon alles vorhanden, was ich wissen musste. Doch mit der gedruckten bekam ich das Ganze geordnet und zusammen, was einem dann auch beim Lernen helfen wird …	Ich fand die Einstiege sehr gut und hilfreich. Man konnte alles gut überblicken, was für mich bei den Aufgabenblättern schwieriger wurde.
CC	Ich verstehe nun π, den Zusammenhang zwischen Ecken- und Rundland.	Die Formeltabelle war sehr geraten, weil wir nichts wussten. Gute Idee mit Ton, Figuren Herstellen und dann Beziehungen Suchen.	Am Anfang etwas unklar, aber dann wurde alles klar.	Es war ziemlich komplex. War ein guter Übergang zu den runden Körpern zu wechseln.	Mantellinie war am Anfang unklar.	War angenehm zum Lernen, leicht verstanden.	Nicht mehr Formeln auswendig lernen. Eigene Formel stimmt mit der gedruckten überein.	Es war ziemlich lehrreich. Streckungsbeispiele hätte man weglassen können.
DD	Die Stereometrie war für mich früher etwas, das ich mir sehr kompliziert vorgestellt habe. Doch jetzt, da ich mitten im Thema war, hat mich fasziniert, wie simpel z. T. die Zusammenhänge zwischen Flächen und Körpern darzustellen sind.	Diese Art von Einführung in ein so komplexes und langes Thema hat mir persönlich gut gefallen und das fand ich sehr originell. Dazu war es nicht das erste Mal, dass wir dementsprechend in ein Lehrstück eingestiegen sind.	Hier haben mir die diversen Zerlegungen der Pyramiden gefallen, die aus einem Würfel hervorgingen. Ich fand gut, dass uns diverse Methoden nahe gebracht wurden.	Meiner Meinung nach war dies der schwierigste Teil, da man sehr viel selbst interpretieren musste. Auch war dies das einzige Stück, das wir nicht konkret genug angeschaut haben.	Ging ein wenig zu schnell. Einziger negativer Punkt.	Wie immer war dieser Auftritt sehr gelungen und hatte viel zu bieten. Dass auch Hintergründe und durchaus Wissenswertes erzählt wurde, war gut.	Schöner Rückblick auf 1. Lektion und runder Schluss zum Rundland (ganzen Thema).	Mir hat wie gesagt dieses Thema gut gefallen und ich würde gerne wieder eine selbe Lehrzeit zu einem Lehrstück behandeln. Alles war von Anfang bis Schluss sehr komplett und auch hintergründig gut gestaltet und mit viel Finesse verfeinert.
EE	Dass das eine mit dem anderen verbunden ist.	Alle Formen sind miteinander verbunden. Die Formeln konnten zum Teil abgeleitet werden von dem, was wir schon kannten. Fand ich interessant.	War eigentlich nicht schwierig bis auf die Pyramiden.	Ich habe das besser verstanden als das im Eckenland mit der Pyramide. Es war etwas Neues, zu erfahren was π überhaupt ist.	Als wir das mit dem Trichter angeschaut hatten, habe ich auch begriffen, wie es mit der Pyramide läuft.	Ich fand es lustig und begreiflich. Manchmal musste ich selbst grübeln, aber am Schluss ging es.	Die Formeln sind eigentlich nicht schwer, aber die einzelnen sind vertauschbar. Ich finde es gut, dass wir jetzt eine kleine Formelsammlung haben.	Die Pyramide sollte besser erklärt werden, wegen den Berechnungen, wenn ein Teil abgeschnitten ist. Aber ansonsten habe ich alles einigermassen verstanden. Ich finde es komisch, dass die Menschen vor einigen tausend Jahren fast genauso viel wussten, wie wir heute.
FF	Alles ist komplizierter als ich gedacht hätte.		Gute Abfolge der Körper, leider am Anfang zu wenig Aufgaben zum selber Lösen im Unterricht.	Gut mit Einflechten historischer Fakten.	Zu komplizierter Einstieg. Mehr einfache Aufgaben zum Lernen.	Das fand ich gut.		Mehr selbst arbeiten. Vor allem am Anfang, wo es noch eher simpel ist.

GG		**Das Arbeiten mit dem Ton war sehr interessant und auch lustig. Bei Beginn war das Ausfüllen der Formeltabelle noch recht schwierig. Heute erscheint mir das Ganze eher leicht.**		**Die Annäherung an die Zahl π durch Kreise von innen und von aussen fand ich sehr gut. Jedoch fand ich das Ausfüllen der Tabelle (→ numerische Annäherung) etwas kompliziert.**		**Das Erscheinen von Archimedes hat mich sehr beeindruckt. Sein Besuch hat mir sehr gefallen und viele Unklarheiten geklärt.**	**Wie schon erwähnt erschien mir das Ausfüllen der Formelsammlung viel einfacher als das erste Mal. Ich war darüber sehr erfreut, die Formelsammlung ohne grosse Mühe ausfüllen zu können.**	**Ich glaube fast alles! Was sich verbessern sollte ist. Werden an der Tafel irgendwelche Formeln oder Rechnungen aufgeschrieben, so sollten diese etwas langsamer durchgeführt werden. Manchmal werden einige Schritte übersprungen, die meiner Meinung nach stehen sollten, da durch diese vielleicht die ganze Rechnung verständlicher werden würde.**
HH	**Weiss nicht so recht. Mein Ziel war, irgendwie zu kapieren, was an der Tafel läuft und endlich die Formeln für die Körper zu bekommen.**	**War ein guter Einstieg. Ich habe erkannt, was ich schon kann und was ich nicht oder auch nicht mehr weiss.**	**Mit diesen Körpern hatte ich nicht so Probleme, ausser an der Oberfläche der Pyramide habe ich lange „rumgeknorzt". Doch jetzt geht's … so halb. Mit den Diagonalen und so habe ich immer noch so meine Probleme.**	**Die Annäherung zum Kreis und π war für mich zuerst zu kompliziert. Ich habe am Anfang gar nichts gecheckt. Aber die Vergleiche da mit all den Wurzeln fand ich interessant. Archimedes' Sätze waren besser verständlich.**	**Trichter … Naja, weiss auch nicht so recht. Da hatte ich auch lange bis ich alles kapiert hatte.**	**Gute Abwechslung von der Norm. Zuerst fand ich es echt super, wie man alles (viel) über Archimedes erfahren hat, doch das dann an der Tafel war mir zu hoch. Die Beziehungen von Zylinder, Kugel und Kegel kapier ich jetzt gut.**	**Gut! Fast am besten! Jetzt weiss ich, wo mein Kopf steht und habe alle Lösungen und Formeln und so zusammen … Weiss, wo ich noch Probleme habe und was ich nochmals anschauen muss!**	**Eben die zum Schluss, ich hab jetzt alles zusammen. Ich weiss nicht, was man besser machen könnte, ich kapiere meistens die Erklärungen nicht, aber das liegt an mir, ich bin zu langsam. Und drei Lektionen sind zu lang. Bitte nicht mehr in der Tertia!!!**
II	**Dass ich die Formeln nachvollziehen kann. (Formeln der Stereometrie)**	**Die Idee ist gut. Auch das mit den Halbklassen ist gut, da man so einen besseren Link zur Materie bekommt.**		**Dieser Abschnitt war zeitweise ein bisschen zu theoretisch. Man war schnell mal gelangweilt, da man die Zahl π ja kannte und nicht genau wusste, weshalb man jetzt z. B. diese Tabelle ausfüllen musste.**		**Ich fand die Idee super und die Beispiele, die sie mitgebracht haben (Sand/Waage etc.) waren gut. PS: „Wir sind doch hier nicht im Kindergarten, … oder etwa doch?"**	**Gut gelungen. Man hat jetzt wirklich den Überblick über den Stoff.**	**Die Erarbeitung des Stoffes war gut. Nur wie schon erwähnt: Die π-Periode könnte man noch etwas spannender gestalten.**
KK	**Dass sehr viele Körper verwandt sind und man so gewisse Formeln ableiten kann. (Vor allem jeweils im Ecken- oder Rundland)**	**Guter Start für das Thema. Durch aktives mitarbeiten konnte man sich gut annähern und verstand dann Zusammenhänge besser.**	**Das Eckenland (v. a. Blatt mit Oktaeder etc...) ist zuerst sehr erschreckend und kompliziert. Wenn man sich dann ein bisschen eingearbeitet hat, geht's jedoch auch dann nicht ohne weitere Komplikationen.**	**Sehr kompliziert, dass man eine Zahl nicht darstellen kann, man kennt nur den Wert. Zu sehen, wie man sich schon früher mit der Zahl befasste, war interessant.**	**Ein bisschen einfacher als Eckenland, da einige Formeln noch präsenter sind. Trotzdem auch sehr anstrengend (Zusammen mit dem Eckenland vielleicht ein bisschen viel, obwohl klar ist, dass es aufeinander folgend „einfacher" ist).**	**Auftritt ist eine sehr willkommene Abwechslung. Vielleicht geht Archimedes ein bisschen schnell vor im Erklären, aber für ihn ist das ja auch einleuchtend. Wenn man dann all die Auskünfte „sacken liess", konnte man ja immer noch Fragen stellen (merci !) Das Thema wird immer vertrauter, da man ja schon viel vorgearbeitet hat.**	**Gut nun noch mal alles zusammenzufügen und zu repetieren. Positives Gefühl zu sehen, wie viel man dann doch gelernt hat. (Vergleich Formelsammlung, die wir am Anfang hätten ausfüllen sollen und die von heute!)**	**Archimedes Besuch war toll (sehr gute Idee!) Die viele Theorie wächst einem jedoch manchmal über den Kopf. Glücklicherweise hat man viele Übungsmöglichkeiten und Lernkontrollen, merci!**
LL	**Die Formeln für die Kugel.**	**Das fand ich gut.**		**Zuviel Zusatzinformationen (Archimedes). Annäherung an π war ziemlich lang.**	**Interessant, gut aufgebaut.**	**Das war interessant. Und vor allem mal was anderes. Und man konnte es sich vorstellen (Sand, Waage,…).**	**Überblick zum Abschluss: Das ist gut.**	**Die Annäherung an π war etwas lange, aber grundsätzlich gut. Es ist auch gut, dass wir nicht nur eine Aufgabe nach der anderen machen müssen, aber dafür konnten wir zum Teil etwas wenig üben.**
MM	**Annäherung an π. Körperberechnungen und deren Verhältnisse.**	**Guter Einstieg mit dem Ton. Ging aber danach verloren, denn wir führten den Ton nicht weiter. Dieser Teil war zu kurz.**	**Bis auf Pyramide kannte ich alles schon.**	**Hat mich verblüfft, dass Archimedes das alles im Kopf rechnete. Die Sätze waren kompliziert zu verstehen. Dieser Abschnitt war zu lang.**		**War wieder einmal (Pythagoras) lustig.**	**War hilfreich, alles noch ein bisschen „auffrischen" zu können.**	**Es hat mich beeindruckt, wie Archimedes (oder Hans?) das alles herausgefunden hat. Es sollte mehr Aufgaben geben, womit man sich trainieren kann.**
NN	**Wie die Annäherung von π geht. Wie rund begrenzte und eckig begrenzte Flächen zusammen hängen.**	**Die erste Formeltabelle konnte kaum von jemandem ganz ausgefüllt werden. Man fühlte sich ein bisschen hilflos.**	**Erinnerungen an die Sekundarschule wurden wieder wach. Ein paar Körper waren mir noch geläufig, andere musste ich wieder lernen.**	**Es war interessant zu sehen, wie im Laufe der Zeit die Zahl π immer genauer wurde. Die Sätze von Archimedes sind hoch interessant, aber nicht so leicht zu verstehen.**	**Der Zusammenhang zwischen „Eckenland" und „Rundland" wird ersichtlich.**	**Eine gute Idee, dass Archimedes vorbeischaute, aber nach ein paar Minuten wurde es ein bisschen langweilig. Die Idee ist ausbaufähig. Bringt Abwechslung in den Unterricht.**	**Gut, dass man sich nochmals alles, was man gelernt hat, durch den Kopf gehen lassen kann, war ja nicht gerade wenig, aber interessant.**	**Wie man sich schrittweise an π annäherte fand ich interessant. Zwischendurch wurde das Thema ein bisschen langweilig, da man nicht recht vorwärts kam, dann ging es aber plötzlich mit einem „Affenzahn" weiter.**
OO	**Ich fand es gut, dass man zuerst die Körper herstellte. Ich würde sagen, am Anfang war vielleicht zu viel Lernstoff.**	**Es war interessant, die Körper zu erstellen und zu schauen, wie es vom Eckenland ins Rundland ging.**	**Ich fand es nicht gut, dass man alle Körper in der gleichen Zeit anschaute.**	**Ich finde es interessant, dass man schon so früh an diese Zahl kam. Die Annäherung mit den eckigen Körpern fand ich gut.**	**Es war einfacher als die Aufgaben vom Eckenland, weil es nicht so viele Körper gibt.**	**Sehr interessante und lehrreiche Stunde.**	**Wenn man am Anfang schaute, wusste man gerade die Formeln vom Eckenland und die Kreise, aber jetzt kann man alle Formeln.**	**Die Stunde mit Archimedes war sehr gut. Was nicht gut war, dass am Anfang zu viel Stoff beisammen war.**

PP	**Vertiefter Einblick in das Rundland und Eckenland bekommen zu haben. Den Übergang von Rund- zu Eckenland gesehen zu haben, auch mit vertieftem Einblick in die Zahl π.**	**Ich fand diese Lektionen unterhaltend und doch lehrreich. Es erleichtert vieles, wenn man das Besprochene vor den Augen hat.**	**Das Aufzeichnen der verschiedenen Körper mit der entsprechenden Erklärung half mir sehr, weil ich mir dann die Formeln vorstellen konnte.**	**Das Bearbeiten der Zahl π fand ich gut, vor allem dass man mal ein bisschen länger an etwas macht und sich vertieft. Doch diese Formeltabellen der Annäherung fand ich zu viel, auf Dauer zu klar und langweilig.**	**Bei den Sätzen von Archimedes musste ich zweimal lesen, bis ich sie verstand. Den Teil mit dem Kegel fand ich sehr anspruchsvoll $\rightarrow$ Oberfläche des Kegels. Das Anfreunden mit dem Rundland war für mich sicherlich schwieriger als mit dem Eckenland.**	**Der Archimedes beeindruckte mich sehr. Ich finde es spannend zu sehen, wie er auf diese Formeln kam und was er schon alles gemacht hat. Die Beziehungen zwischen Zylinder, Kugel und Kegel fand ich gut ersichtlich.**	**Lehrreich waren die beiden Lektionen nicht gerade. Doch das Vorlesen fand ich schön. Ich wusste gar nicht, dass es solche Bücher gibt (nicht nur Formeln).**	**Den Besuch von Archimedes fand ich lehrreich und zugleich eindrücklich. Es ist mal etwas anderes als das ständige Aufgaben und Formeln lösen.**
QQ	**Körperberechnung. Annäherung an die Zahl π.**	**Die erste Lektion war sehr interessant. Das eigene Formen von Körpern hat Spass gemacht. (Gute Idee mit Halbklasse). Das Abzeichnen und Schattieren der Körper war überflüssig.**		**Die historische Übersicht hat mir sehr gefallen. Man konnte schauen, wie lange man π schon kennt. Die Sätze von Archimedes haben mir nicht sehr geholfen, sie haben mich eher verwirrt.**	**Das Ausschneiden eines Trichters war eine sehr lehrreiche Aufgabe.**	**Das Herleiten der Formel für die Berechnung der Kugel hast du viel zu schnell und kurz erklärt.**		**Sehr lehrreich waren die Teile des Unterrichts, bei denen man nicht nur überlegen, sondern auch von Hand etwas machen musste (Ton, Trichter). Der Auftritt von Archimedes war überzeugend. Wenn du etwas an der Wandtafel erklärst, was wir aufschreiben sollten, geht es meistens viel zu schnell.**
RR		**Visualisierung der zentralsten Körper. Positiv: Tonkneten Negativ: Formeltabelle ausfüllen ohne Grundkenntnisse.**	**Positiv: selbständige Arbeit mit dem Blatt, wo man selbst die Körper zeichnen musste, Formelzusammenfassung.**	**Die Nachahmung der Annäherung war sehr interessant. Die Tabelle z. T. zu kompliziert.**	**Positiv: selbständiges Arbeiten.**	**Der Auftritt war interessant, amüsant und unterhaltsam, lehrreich im Bezug auf Archimedes' Lebenswerk.**	**Das erneute Erstellen der Formeltabelle half, um Wissensfortschritte zu beobachten. Gute Formelsammlung.**	**Positiv: selbständiges Ausprobieren (Trichterberechnung), Aufgabenblätter. Es waren etwas viele Formeln zum auswendig Lernen aufs Mal.**
SS	**<u>Die Annäherung an die Zahl π !</u>**	**Diese Lektionen waren sehr lustig und amüsant. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass wir dieses Thema dazumals spielerisch in Angriff genommen haben. Das fand ich sehr gut.**		**Wieder mal ein bisschen Abwechslung durch geschichtliche Texte und Ereignisse in Archimedes Leben. Sehr eindrücklich und interessant.**		**Fand ich sehr lustig! <u>Ein bisschen Abwechslung schadet nie!</u>**	**Sehr praktische Formelsammlung! Danke!**	**Ich finde es sehr gut, dass sie den Unterricht so gestalten, dass wir nicht nur stur Matheaufgabe für Matheaufgabe lösen, sondern, dass sie uns immer mit geschichtlichen Hintergründen, Erzählungen ... ein bisschen Abwechslung ins „Spiel" bringen. Jedoch sollten sie während dem Unterricht mehr nachfragen, ob wirklich allen alles klar ist, denn ich glaube dies ist nicht immer der Fall.**
TT	**Die Annäherung an die Zahl π und die Zusammenhänge der Körper.**	**Interessante Lektionen als Einführung in die Stereometrie.**	**Für mich das Kapitel, das am schwersten zu verstehen war.**	**Annäherung an die Zahl π war sehr komplex, es war schwierig, alles nachvollziehen zu können. Etwas viel Details, die vom Wesentlichen abweichen!**	**Habe ich recht schnell begriffen. Unterricht war gut erklärt.**	**Amüsante Lektion mit Archimedes. So fällt es leichter, den Stoff aufzunehmen.**	**Endlich ist sie da!**	**An der Tafel, wenn wir Formeln erarbeiteten, ging es manchmal zu schnell. Du warst oft schon fertig mit Aufschreiben, während wir noch am Anfang der Formel waren und überlegten. Dann konnten wir nicht beim aktuellen Schritt mitdenken und wussten nicht mehr, was passiert war. doch im Grossen und Ganzen war der Unterricht sehr lehrreich und interessant.**
UU	**Alles hängt mit allem ZUSAMMEN !**	**Super fand ich das Körperformen mit Ton.**	**Habe ich schon gekannt.**	**Ich fand es interessant, zu sehen wie sie schon damals auf diese Zahl π gekommen sind.**	**Die beiden Körper sind ähnlich und doch verschieden.**	**Dass Archimedes immer noch lebt, beweist, dass er ein Genie ist. Sein Leben und seine Taten finde ich wirklich interessant und bewundernswert.**	**Mit der Formelsammlung müssen wir weniger auswendig lernen und das freut mich sehr.**	**Weniger Beweise, mehr praktisches Rechnen. Ansonsten fand ich den Unterricht lebendig gestaltet (Archimedes, Ton, …)**
VV	**Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Ecken- und Rundland. Figuren aus dem Rundland können durch Figuren aus dem Eckenland hergeleitet werden. Grenzwärter π.**	**Durch das Erstellen von Tonfiguren konnten wir uns die dreidimensionalen Figuren ansehen und mussten sie uns nicht nur vorstellen. Die Formeltabelle strukturierte das Ganze.**	**Berechnung der Körper im Eckenland zum Herleiten von Formeln fürs Rundland.**	**Entwicklung der Zahl π. Rekord der Zahl π.**				**<u>Gefallen</u>: Tonfiguren: Sehen der dreidimensionalen Figuren in Wirklichkeit. Formelsammlung auf Blatt: Hilfreich für den Überblick. Archimedes: Einblick in sein Leben. Goldkugel: praktische Anwendung. π-Rekord: Aktuelles. Verbesserungsmöglichkeit: Für die Flächenberechnung des Drehkegels ein Blatt als Stütze.**
WW	**Die Annäherung zur Zahl π. Formel von Grundfläche und Volumen. Zusammenhänge verschiedener Figuren.**	**Bei Körperfamilie waren wir uns nicht einig. Die Formeltabelle ist grösstenteils geraten.**	**Würfel und Quader leicht. Für Pyramide und Prisma, leichte Probleme beim Finden der Formel.**	**War interessant. Ich frage mich immer noch, wie Archimedes diese Zahlen ohne Taschenrechner rechnen konnte. Und ich finde es faszinierend, dass man vor Christus schon π um 1/10 verfehlte.**	**Dies war fast eine Repetition, weil man die Formeln vom Eckenland kennt (Pyramide und Quader).**	**Der Auftritt war hilfreich. Die Kugel war anfangs schwer begreiflich, bis man das Blatt mit Brücken zwischen Oberfläche und Volumen der Kugel bekam. Es war am Schluss eine hilfreiche, auffrischende Repetition.**	**Man hat nun eine Formelsammlung. Damit kann man diese Formeln jedes Mal nachsehen.**	**Ja, sie war sehr lehrreich. Mir kommen keine Verbesserungsvorschläge in den Sinn (ausser beim Archimedes-Kostüm).**

Im Einstieg entsteht die Körperfamilie:
Am Einstieg hat das praktische Gestalten gefallen. Es wird als „unterhaltend und doch lehrreich“ (PP) empfunden. Das Arbeiten mit Halbklassen hat den Vorteil, dass alle gut beteiligt sein können. Für EE kommt bereits hier zum Ausdruck, dass alle Formen miteinander verbunden sind. MM kritisiert, dass wir das Arbeiten mit Ton nicht weiterführten. Die Körper waren immer da und auch der Ton wäre bereit gewesen. Manchmal setze ich ihn beim Unterteilen eines Würfels in gleiche Pyramiden wieder ein. Denkbar ist auch eine Wiederverwendung im Rundland im Zusammenhang mit der Waage. Die Tabelle, als erste Auseinandersetzung mit Formeln zu den Körpern gedacht, wird von VV als strukturierendes Element erlebt, während sich NN hilflos fühlt bei dieser ersten Annäherung an die Tabelle. Am Ende des Lehrstücks kommt die Tabelle ja wieder: „Gut, dass man sich nochmals alles, was man gelernt hat, durch den Kopf gehen lassen kann, war ja nicht gerade wenig, aber interessant.“

Die Körper im Eckenland:
Bis auf die Pyramide sollte dieser Abschnitt Repetition des 8. Schuljahres sein. Wir wiederholen vieles. Die Unterschiede sind gross. Von UU: „Habe ich schon gekannt.“ bis TT: „Für mich das Kapitel, das am schwersten zu verstehen war.“ Das Blatt mit den Körpern im Würfel fördert das Anschauungsvermögen und ist geeignet für selbständige Auseinandersetzung mit diesen Körpern. Ich setzte es ein, um die Wissensunterschiede zu verkleinern.

Annäherung an die Zahl π:
Der historische Teil zur Zahl π, auch ein Stück Ideengeschichte, kommt gut an. Zur Tabelle meint RR: „Die Nachahmung der Annäherung war sehr interessant. Die Tabelle z. T. zu kompliziert.“ Dabei ist vermutlich die Ausrechnung gemeint. Diese ist anspruchsvoll und aufwändig, aber immer noch einfacher, als wenn wir, wie Archimedes vor 2250 Jahren, alles von Hand rechnen würden. NN: „Die Sätze von Archimedes sind hoch interessant, aber nicht so leicht zu verstehen.“ Genau das ist die herausfordernde Seite an diesen Sätzen! Wer sich durchringt, bis er sie versteht, hat einen Denkprozess geleistet, auf den er stolz sein darf.

Im Rundland:
Wer sich von den Überlegungen im Eckenland leiten liess, hatte im Rundland nicht allzu viel Mühe. Nach dem aufwändigen Ausfüllen der Tabelle ist die Trichteraufgabe ein Methodensprung: Nachdenken und Handeln in enger Verbindung. EE gelingt es sogar, aufgrund des konkreten Trichters Rückschlüsse auf Körper im Eckenland zu ziehen.

Archimedes tritt auf, erläutert das Kugelvolumen und zeigt den Weg zu einfachen Beziehungen: Der Auftritt von Archimedes brachte „Hintergründe und durchaus Wissenswertes“ (DD), man konnte sich das dank Sand, Waage, Schreibtafel, etc. gut vorstellen. Einzig die Formel für das Kugelvolumen hatte Archimedes „viel zu schnell und kurz erklärt.“ Hier wurde ein Ausschnitt etwas anspruchsvolleren Denkens von Archimedes präsentiert, der dank der Vorkenntnisse dieses Schuljahres nachvollzogen werden kann. Zum genaueren Nachvollziehen stand in der zweiten Lektion genügend Zeit zur Verfügung. Wer sich diese Mühe macht, gewinnt eine andere Achtung vor den Leistungen des Archimedes. Eine innere Stimme sagt mir: *„Bleibe bei dieser Präsentation! Wir neigen dazu, immer alle Hindernisse aus dem Weg zu räumen. Wo bleibt da die besondere Herausforderung? Wo sollen interessiertere und begabtere Schülerinnen und Schüler ihre Kräfte entfalten? Warum verweigern wir ihnen das mögliche Erfolgserlebnis? Und wie sollen sie die Leistung von Archimedes würdigen können, wenn sie nicht für* einmal *seinen Weg gegangen sind?* Immer nur *die Normalrouten zu begehen, das ist zu wenig!“*

Eigene Formelsammlung. Überblick zum Abschluss:
Die Freude ist gross. Erstens das Erlebnis von GG: „Ich war darüber sehr erfreut, die Formelsammlung ohne grosse Mühe ausfüllen zu können." Zweitens wird ein klärender Überblick geschaffen von NN: „War ja nicht gerade wenig, aber interessant." Drittens herrscht bei den meisten, wie bei AA: „Freude über die erste Formelsammlung!" Oder TT: „Endlich ist sie da!" Und UU: „Mit der Formelsammlung müssen wir weniger auswendig lernen und das freut mich sehr." Allerdings hat die Formelsammlung auch eine andere Seite. Wir haben uns intensiv mit den Formeln, ihrem Zustandekommen und ihrer gegenseitigen Bedingtheit auseinandergesetzt, so dass diese Formeln samt ihren Bedeutungen im Kopf abrufbar sein sollten, und zwar ohne zusätzliches Auswendiglernen. Alle wissen, dass die Kreisfläche das π-fache von r^2 ist. Wer sich jetzt an die zwei Seiten des Mondes erinnert, wird leicht die Kugeloberfläche bestimmen können. Die Formelsammlung verleitet leider immer wieder dazu, nachzuschlagen statt nachzudenken. Schade!

Schlussbemerkungen:
Wir hören viele positive Stimmen wie schon bei den Rückmeldungen zu den einzelnen Akten. Pflücken wir ein paar kritische Anmerkungen heraus: AA wünscht: „Bitte ein bisschen länger, eingehender, einfacher erklären." In Lehrstücken arbeiten wir oft prozesshaft. In der Klasse nimmt der Prozess nicht immer den einfachsten Weg. Die Bitte von AA bezieht sich besonders auf die Berechnung des Kugelvolumens. Das Dilemma des Vorgehens habe ich erwähnt, es geht immer auf Kosten des einen oder anderen Schülers. Vielleicht werde ich im Nachhinein mit einem Arbeitsblatt die einfache Variante darstellen. Vermeiden möchte ich allerdings, dass wir damit die grossartige Leistung von Archimedes schmälern. – SS kritisiert: „Jedoch sollten sie während dem Unterricht mehr nachfragen, ob wirklich allen alles klar ist, denn ich glaube, dies ist nicht immer der Fall." *Es gibt im Lehrstück Phasen, wo wir lange gemeinsam verweilen, in die Tiefe gehen, den Kern der Sache erörtern, bis ihn alle begriffen haben. Es gibt andere Sequenzen, in denen sich der Einzelne in grosser Eigenverantwortung mit möglicher Unterstützung von Kollegen, Kolleginnen und Lehrkraft Klarheit verschaffen muss (wenn er wirklich will!). Vielleicht muss ich diesen Unterschied in Zukunft noch klarer kommunizieren! – Die Arbeit an der π-Tabelle wird von Einzelnen als lange, langweilig oder als kompliziert empfunden. Hier könnten wir die Berechnung früher an die Tabellenkalkulation delegieren, bereits nach einigen Zeilen, sobald das weitere Vorgehen klar ist.* – Im Aufgabenteil habe ich Pyramidenstumpfe eingebaut, die logisches Denken erfordern und zeigen, wie Streckungsüberlegungen in der Stereometrie nützlich sind. Dies hat offenbar einige Schüler überfordert. UU wünscht: „Weniger Beweise, mehr praktisches Rechnen." Das logische Herleiten der Formeln ist Kernidee dieses Lehrstücks und sollte deshalb nicht weiter gekürzt werden. Die Anwendungsbeispiele liessen sich vermehren, was allerdings das Lehrstück verlängern würde. Heben wir zum Schluss von den vielen positiven Rückmeldungen wenigstens DD hervor: „Alles war von Anfang bis Schluss sehr komplett und auch hintergründig gut gestaltet und mit viel Finesse verfeinert." Danke!

Werfen wir den Blick darauf, wie zwei Schüler oder Schülerinnen das Lehrstück als Ganzes erlebt haben.

EE erlebt als zentrale Erkenntnis die Tatsache, „dass das eine mit dem anderen verbunden ist." Das bezieht sich wohl auf Eckenland und Rundland, heisst aber auch: „Alle Formen sind mit einander verbunden." Offenbar bezieht sich AA auf bereits Bekanntes und findet Interesse daran, dass neue Formeln daraus abgeleitet werden können. Das Strukturieren beginnt. Bei den Pyramiden und damit auch bei den Anwendungen im Würfel tauchen die ersten Schwierigkeiten auf. Es ist erstaunlich, dass die anspruchsvolle Annäherung an π weniger Probleme bereitet. Als Novum hat die Zahl π vermutlich neues Interesse geweckt. Erfreulich ist, dass die kopf- und handorientierte Auseinandersetzung mit dem Trichter sogar rückwirkend die Pyramide begreifen lässt. Der Auftritt von Archimedes war lustig und einleuchtend. Allerdings musste sich AA sehr anstrengen, um die anspruchsvollen Zusammenhänge zu verstehen. Das Erfolgserlebnis blieb nicht aus. Die Beziehung zu den Formeln ist hergestellt. Diese sind nicht schwer einzusehen. Ohne die nötige Vorsicht könnten sie aber verwechselt werden. Die kleine Formelsammlung wird begrüsst. Alles ist einigermassen verstanden. Rätselhaft geblieben sind die Pyramiden, vor allem wenn oben ein Teil fehlt. Bei AA hören wir ein Staunen und Achtung vor dem Wissen, das sich die Menschen bereits vor Jahrtausenden aneigneten. Die ganze Geometrie bis zum 9. Schuljahr (und noch viel mehr) wurde bereits damals entwickelt.

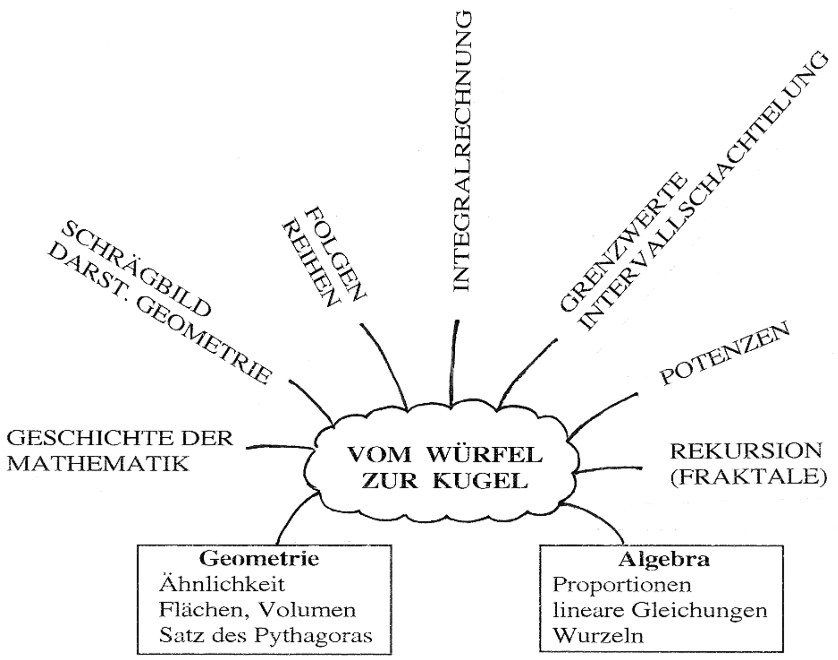
HH tut sich schwer mit der Mathematik. Der Einstieg fand Gefallen. Er knüpfte offenbar bei Bekanntem an, wies auf Vergessenes und Neues hin. Die Oberfläche der Pyramiden und die Diagonalen bereiteten Probleme. Hier sind ein gutes Vorstellungsvermögen und der Satz des Pythagoras gefragt. Für HH ist der Zugang vom Sprachlichen her zum Problem offenbar einfacher als über Berechnungen. Die Wurzeln faszinierten. Der Trichter verlangte wieder viel Denk- und Vorstellungsvermögen. Die Aspekte über Archimedes und sein Leben fanden Anklang, die Kletterroute zum Kugelvolumen war für HH allerdings zu schwierig. Trotzdem wurde es HH möglich, die Beziehungen der Körper im Rundland zu verstehen. Der Überblick und die Formelsammlung am Schluss bieten willkommene Orientierung: „Jetzt weiss ich wo mein Kopf steht". HH ist langsam, kann sich aber helfen und findet den Weg: „Weiss, wo ich noch Probleme habe und was ich nochmals anschauen muss!"

Leider konnte ich den Schülerinnen und Schülern die Gedanken, wie ich sie oben formuliert habe, nicht mitteilen. Die Sommerferien kamen dazwischen und ich gab die Klasse für ein halbes Jahr an einen Kollegen ab. Zwar traf ich die Klasse kurz, um das Poster fertig zu stellen, aber das Interesse an einer Rückmeldung war nicht vorhanden.

3.6 Didaktische Interpretation: Methodentrias

Exemplarisch
Die einfachsten der Körper, die uns tagtäglich umgeben, sie entstehen in unseren Händen. Diese Körper stehen in Beziehung zueinander, sie bedingen einander in der Körperfamilie. Welches ist ihr gegenseitiger Bezug, welches ihr Verwandtschaftsverhältnis? Die Beziehungen dieser Körper zueinander bestimmen die Struktur des Lehrstücks und liefern zugleich den roten Faden bis zum Schluss. Wir nehmen uns Zeit, diese Körper herzustellen, uns mit ihren Namen und Formen anzufreunden und ihre Entsprechungen im Alltag ins Auge zu fassen. Im Eckenland steht der Übergang vom Quader zur Pyramide im Zentrum. Warum muss bei der Volumenberechnung durch 3 geteilt werden? Zerlegungen von Würfel und Prisma zeigen uns die Begründung. Der Würfel lehrt uns auch verschiedene andere regelmässige Körper wie Tetraeder, Oktaeder und Kuboktaeder unter neuem Aspekt zu sehen und zu verstehen.

Eckenland und Rundland sind zwei getrennte Welten. Für den Übergang hilft uns Archimedes als Fährmann. Das Runde wird – in einem endlosen Prozess – von innen und von aussen durch das Geradlinige angenähert. Das Jahrtausende alte und noch heute andauernde Ringen der Menschheit um diesen Übergang und um die Bestimmung von π verweist auf die Schwierigkeiten dieses Übergangs. Sind wir im Rundland angelangt, so werden die Bezüge wieder einfach. Einzig die Kugel will errungen sein. Meister Archimedes als Protagonist weist uns einen genialen Weg und führt uns zur Schönheit der Verhältnisse. Das Rätsel ist gelöst, die Familie der Körper ist uns vertraut, der Weg vom Würfel zur Kugel ist durchschritten und die Resultate liegen jetzt auch mit der Formelsammlung vor uns. Ob wir uns wieder an die einfachen Bezüge erinnern beim Betrachten einiger Gläser auf dem Tisch oder des Vollmondes am Himmel?



Genetisch
Der Weg vom Würfel zur Kugel, vom Eckigen zum Runden entspricht in etwa auch dem Gang der Erkenntnis. Das Eckenland ist früh ergründet, obwohl auch für das Pyramidenvolumen ein unendlicher Grenzprozess vonnöten ist. Über Zylinder und Kegel ist vieles bekannt, aber erst 150 Jahre nach Euklid gelingt es Archimedes, das Geheimnis der Kugel, der einfachsten und reinsten Gestalt, zu fassen. Methodisch folgen wir den Spuren von Archimedes: Mit den Händen erschaffen wir unsere Körper, durch Experimentieren und Wägen gelangen wir zu unseren Vermutungen und schliesslich können wir mit dem Kopf die Erkenntnisse klar formulieren und begründen. Historisch-genetisch setzen wir uns mit verschiedenen in der Antike formulierten Erkenntnissen auseinander, versuchen sie zu verstehen und zu ergründen. Und erst später gelingt es sogar, diese Erkenntnisse in einer eleganten Kurzschrift, mit einer Formel, festzuhalten. *Formen – Formulieren – Formeln* (im Sinne von Formeln gewinnen), diese drei Tätigkeiten begleiten uns durch das Lehrstück und dies ist auch der Dreischritt, den wir alle individual-genetisch durchlaufen sollten. Nur so ist eine Formel eingewurzelt und bedeutungsvoll, nur so erleben wir mit dieser Kurzform auch die Kraft der damit verbundenen Form und die Stärke der klar formulierten Erkenntnis.

Dramaturgisch
Archimedes begleitet uns durch das ganze Lehrstück hindurch. Es beginnt mit dem grossen Wurf des Sandrechners in die Weite des Alls und des Zahlenreichs, über seine Annäherung von π und die Eroberung der Kugel bis zum Geheimnis über Archimedes' Grabmal. Ebenso begleitet uns die Körperfamilie. Sie entsteht in und aus unseren Händen, wird formiert und bestimmt die Struktur des Lehrstücks mit Eckenland, Übergang zum Runden und Rundland.

Wir erleben in gut 20 Lektionen den zu Beginn vorgezeichneten Weg vom Würfel zur Kugel, wobei jeder der Körper zu seiner Zeit im Zentrum steht und dann wieder zurücktritt, aber präsent bleibt. Gleichzeitig verwandelt sich das anfängliche Formelchaos zur geordneten, bedeutungsvollen Formeltabelle, die Formen werden ergänzt durch die Formeln. Die verwirrende Vielfalt der Körper vom Anfang hat sich strukturiert und weist schliesslich überraschend einfache Verhältnisse auf. Mit Blick zurück lässt sich der Gang durch die Welt der mathematischen Körper eindrücklich mit einem Poster abrunden.

3.7 Das Lehrstück in der Fachschaft

Am 5. Dezember 2003 präsentiere ich das Lehrstück in meinem Zimmer: Von den 16 eingeladenen Fachlehrkräften kommen immerhin deren fünf: Martin und Hansueli vom mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium, Bärbel und Hans vom Literargymnasium und meine künftige Praktikantin Isabelle. Da zwei von ihnen frühzeitig wieder gehen müssen, bleiben nur 45 Minuten Zeit. Das Material habe ich auf Tischreihen für einen Rundgang durch das Lehrstück nach Akten ausgebreitet. Nach einigen einführenden Bemerkungen über Lehrstücke konzentrieren wir uns kurz auf die Anordnung der Körperfamilie. Martin berichtet, dass auch im mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium die Jugendlichen die Körpernamen nicht kennen. Das Zeichnen der Körperfamilie findet bei allen Anwesenden grossen Gefallen. Ich bin selbst erstaunt, wie viel in der ersten Doppelstunde behandelt wird. Im Eckenland liegen viele aus Karton hergestellte Körper. Bärbel erkundigt sich, ob all diese Körper in der Stunde entstanden seien. Nein, öfters habe ich den Hausauftrag erteilt, ganz bestimmte Körper zu bauen und oft wurden diese dann in der folgenden Stunde zueinander in Bezug gesetzt, z.B. indem einige von ihnen zusammen in einen Würfel passen mussten. Beim Kreis wendet Martin ein, dieser sei ja bekannt. Aber es wird zugegeben, dass hier viel Neues, insbesondere auch Historisches dazukommt und dass ein hohes Mass an anspruchsvoller Repetition des Quartastoffes integriert ist: Pythagoras und der Umgang mit Wurzeln, Gleichungen lösen, Ähnlichkeit. Der Text des Papyrus Rhind scheint unbekannt zu sein. Dass wir hier beim algorithmischen Rechnen an Grenzen stossen, wird besonders beachtet. Im Rundland werden vor allem die vielfältigen Zusammenhänge und meine Gläser bestaunt. Leider sind die 45 Minuten allzu rasch um. Zum Poster gibt es keine Reaktionen. Von Bärbel, welche kürzlich mein Lehrstück zu Pythagoras angeschaut hat, erfahre ich, dass ihr dieses Lehrstück bedeutend besser gefällt. Schade, dass alle bereits wieder im eigenen Unterricht verschwinden müssen. Das eine oder andere zusätzliche Feedback hätte mich interessiert. Dafür nimmt sich Urs Höner, unser Rektor, wenig später eine Viertelstunde Zeit, um mit mir zusammen die Auslage anzusehen. Derartige Unterstützung und Wertschätzung wünsche ich allen Lehrkräften, die innovativ ihren Unterricht verbessern wollen und damit die Schule verändern!

Da einige meiner Kollegen ihr Bedauern ausdrücken, dass sie nicht dabei sein konnten, beschliesse ich nach Rücksprachen, die Präsentation am 12. Januar zu wiederholen. Wiederum erscheinen fünf Interessierte: Klaus, Heiner und Niklaus vom Wirtschaftsgymnasium, Hans-Jörg vom mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium und Cornelia aus einem anderen Berner Gymnasium. Diesmal haben wir eine ganze Stunde zur Verfügung. Der Rundgang durch das Lehrstück wird etwas lebendiger, insbesondere da Cornelia das Lehrstück kennt und ebenfalls im Unterricht anwendet. Auch sie lässt in der ersten Doppelstunde die Körper abzeichnen. Beim Einstieg zum Kreis bringt sie ein Brett mit gezeichnetem Kreis und eingeschlagenen Nägeln, um den Umfang zu diskutieren. Klaus lässt auf einem Seidenpapier einen grossen Kreis und darin an beliebiger Stelle ein Quadrat mit dem Radius als Seitenlänge zeichnen. Dann wird das Blatt mehrfach gefaltet und mit einer Nadel hundertfach durchstochen. Nach dem Entfalten lässt er die Punkte innerhalb des Quadrats und des Kreises auszählen und daraus erhält er π auf drei Stellen genau. Dem entspricht der „Zufallsregen", den Hans Jörg am Computer auf ein Quadrat mit einbeschriebenem Viertelkreis fällen lässt, um dann auch das Punkteverhältnis zu bestimmen. Mit dem Vorgehen von Cornelia sind wir allerdings am nächsten bei den Überlegungen von Archimedes. Vor dem Buch mit den Abhandlungen von Archimedes stehend, verdeckt Hans Jörg mit einem Finger das „Ab". Es entsteht ein neuer Untertitel für das Lehrstück: „Handlung und Abhandlung" oder „Von der Handlung zur Abhandlung". Mit Hinweis auf die Auslage erwähne ich meinen bisherigen Untertitel: „Formen – Formulieren – Formeln". Ist es ein Qualitätszeichen für Lehrstücke, wenn prägnante Untertitel entstehen? Wir diskutieren die Methoden zur Herleitung des Kugelvolumens. Entscheidend für die Wahl wird wohl die Leistungsbereitschaft der Klasse sein. Zum Abschluss bemerkt Cornelia über das Lehrstück: „Da steckt die ganze Mathematik drin." Sie nimmt die vorkommenden Ideen gezielt später im Unterricht wieder auf: Volumenberechnungen bei den Reihen, Kegel bei den Optimierungsaufgaben, die Idee der Scheiben in der Integralrechnung. Hans Jörg, der selbst vor Jahren Wagenschein persönlich in Seminaren erlebt hat, ist begeistert vom Ausmass der Handlungen in diesem Lehrstück. Der Umgang mit Material liege ihm weniger, er und seine Kollegen am mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium würden zu formal und zu platonisch unterrichten. Klaus gefällt diese Inszenierung wegen der vielen einprägsamen Bilder, die erzeugt werden. Er kann sich gut vorstellen, das Lehrstück bei sich bietender Gelegenheit in dieser Form durchzuführen. Selbst die Rolle des Archimedes scheut er nicht. Er bedauert ein wenig, dass die Jugendlichen in diesem Lehrstück nicht die Möglichkeit haben, in eine Rolle zu schlüpfen wie im Lehrstück zur Wahrscheinlichkeit, wo sie mit spielerisch-kreativen Elementen Briefe entwerfen. Niklaus findet das Lehrstück vielfältig und abwechslungsreich. Ihm gefällt besonders der Bezug zur Antike, die sonst auf unserer Stufe oft vernachlässigt werde. Die Akte III und IV erforderten intensives Mitdenken der Schüler. Der I. Akt mit dem Ton entspreche weniger seinem Naturell. Vielleicht werde er aber über seinen Schatten springen. Ich werde mit ihm zusammensitzen, bevor er in wenigen Monaten die Stereometrie unterrichten wird.

Insgesamt haben sich mit diesen zwei Präsentationen 8 der 15 Fachkollegen der Gymnasien Bern-Neufeld, also gut die Hälfte, für dieses Lehrstück interessiert und es kennen gelernt.

3.8 Die Ideengeschichte im Lehrstück

Betrachten wir in den Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler die zentralen Erkenntnisse, so erhalten wir Hinweise auf die erlebten Grundideen. VV: „Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Ecken- und Rundland. Figuren aus dem Rundland können durch Figuren aus dem Eckenland hergeleitet werden. Grenzwärter π." UU: „Alles hängt mir allem ZUSAMMEN!" WW: „Zusammenhänge verschiedener Figuren." SS (u. a.): „Die Annäherung an die Zahl π!" KK: „Dass sehr viele Körper verwandt sind und man so gewisse Formeln ableiten kann." II: „Dass ich die Formeln nachvollziehen kann. (Formeln der Stereometrie)" Das räumliche Strukturieren [6] mit den verschiedenen Körpern, die Annäherung an π [8,9] und das Entwickeln und Verstehen von Formeln [7] sind offenbar die zentralen Ideen.

Zu Beginn lassen wir die verschiedenen einfachen Körper in unseren Händen entstehen. Sie werden uns durch das ganze Lehrstück hindurch begleiten. Dabei denke ich an Heymann (1996, S. 177): „Die Idee des räumlichen Strukturierens kann sich nur entfalten, wenn (auch) immer wieder der dreidimensionale euklidische Raum praktisch und vorstellungsmässig als

Referenzrahmen herangezogen wird.“ (Grundidee [6]) Wir erleben, wie sich die einfachen Körper zueinander in Beziehung setzen lassen. Sie unterteilen sich in Eckenland und Rundland, es gibt aber eine intensive Verwandtschaft selbst über die Kluft hinweg, so zwischen Prisma und Zylinder einerseits, zwischen Pyramide und Kegel andererseits. Wir formen die Körper aus Ton, bauen sie aus Karton oder Papier, erstellen Handskizzen und zeichnen aus ihren Rissen die Körper im Würfel. Dabei schärfen wir das Auge für Körper und Formen im Alltag.

Beim Formen zu Beginn des Lehrstücks entsteht die Kugel als „einfachster“ Körper. Aber was ist eine Kugel? Hier sollten wir verstärkt die Gedanken auf das Wesen der Kugel, auf die dahinter stehende Idee gemäss Platon lenken. Bei all unseren Betrachtungen durch das ganze Lehrstück hindurch haben wir zwar die realen Gegenstände vor uns, wir befassen uns aber immer mit deren idealen Formen dahinter [2]. Erst die Idee der idealen Figur lässt uns die von Hand geformte Kugel wirklich begreifen. Wittenberg (1990, S. 220) nennt es „ein geistiges Greifen dessen, was vorher ungreifbar blieb.“ Diese Zweiseitigkeit steckt auch in der „Methode“ des Archimedes: Der experimentelle Ansatz mit den real existierenden Körpern, welcher keine exakten Aussagen liefert, steht bei ihm gleichwertig neben der theoretischen Erkenntnisfindung und Begründung, die sich auf die idealen Gegenstände bezieht. In unserem durch Technik geprägten Umfeld finden wir viele Körper, die sehr nahe an der idealen Gestalt sind und sich somit mit den herauskristallisierten mathematischen Formeln einfach berechnen lassen [3].

Die zentrale Idee der Formeln [7] wird im Schullehrplan für das neunte Schuljahr angesprochen: „Die Bedeutung von Formeln erfassen; Formeln gewinnen, deuten, anwenden und umformen.“ (Erziehungsdirektion des Kantons Bern 1996, S. 44) Ausgehend vom Formen beginnen wir Zusammenhänge zu formulieren, die sich schliesslich in Formeln verdichten. Das Grundmuster: „Formen – Formulieren – Formeln“ zieht sich durch das ganze Lehrstück hindurch. Die Kraft der Formeln und ihre gegenseitig Abhängigkeit werden deutlich in der entstehenden Formeltabelle.

Aufgrund der Beziehungen und der Formeln offenbaren sich Zusammenhänge, die sich in einfachsten Zahlenverhältnissen [4] ausdrücken. Im Eckenland ergeben drei Pyramiden ein Prisma, im Rundland stehen die Volumina vergleichbarer Zylinder, Kugel und Kegel im Verhältnis von 3 : 2 : 1. Archimedes bringt es auf den Punkt mit seinem Satz über die Kugel und den ihr umschriebenen Zylinder.

Die ganzen Zahlen genügen aber nicht, wenn wir den Schritt vom Eckenland ins Rundland gehen wollen. Um π, den Vermittler zwischen dem Geradlinigen und dem Runden kennen zu lernen, müssen wir Messen [5]. Im Satz 3 seiner „Kreismessung“ formuliert Archimedes (Archimedes 1798, S. 104): „Jedes Kreises Umfang ist dreymal so gros als der Durchmesser, und noch um etwas grösser, nämlich um weniger als 1/7, aber um mehr als 10/71 des Durchmessers.“ Doch der Umfang lässt sich nicht einfach messen. Archimedes muss den Umfang mit immer kleineren Seitenlängen von aussen und von innen annähern. Erst ein Algorithmus [8] liefert das Instrument, um dem Umfang und damit der Zahl π wesentlich näher zu kommen. Es braucht eine Intervallschachtelung, einen nicht abbrechenden Prozess [9], der es uns erlaubt, die Zahl π zu fassen. Die historische Entwicklung der Annäherung an π zeigt, dass das Verhältnis Durchmesser zu Radius die Menschheit seit Jahrtausenden und bis heute beschäftigt. Auch bei der Bestimmung des Kugelvolumens begegnen wir einem Prozess, der ins unendlich Kleine hineinreicht, ein Verfahren, das für die Infinitesimalrechnung von fundamentaler Bedeutung ist.

Bei den Körpern erleben wir die Mathematik als logisches Gebäude [1] wie in der ebenen Geometrie. Die entstehenden Formeln lassen sich voneinander herleiten, es gibt eine logische Hierarchie der Sätze.

Die Tatsache, dass die Grundideen in diesem Lehrstück sehr stark präsent sind, oder wie Cornelia meint: „Da steckt die ganze Mathematik drin“, ist in der Tabelle ersichtlich:

Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	● ●	● ●	●	● ● ●	● ●	● ● ●	● ● ●	● ● ●	● ● ●	

Godfrey Harold Hardy (1877-1947), ein britischer Zahlentheoretiker, soll einmal gesagt haben: „An Archimedes wird man sich erinnern, wenn Aischylos vergessen ist – weil zwar Sprachen sterben, nicht aber die mathematischen Ideen.“