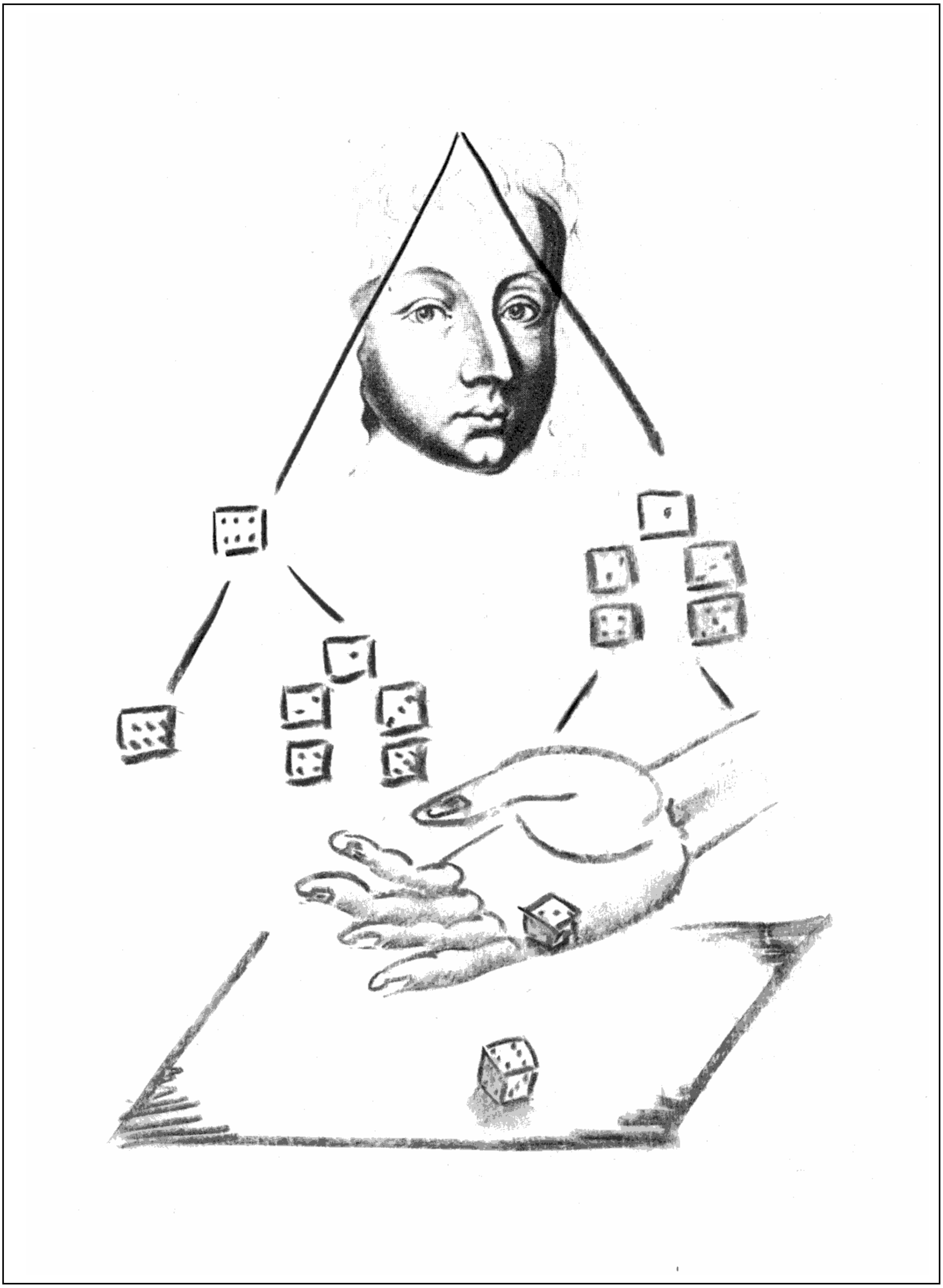
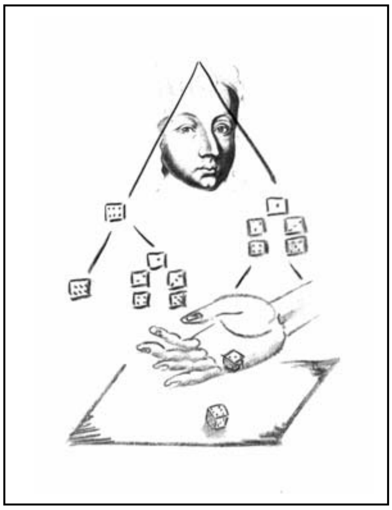


5. DIE GEBURTSSTUNDE DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG MIT PASCAL
Ein Lehrstück zur Wahrscheinlichkeitsrechnung für die 12. Klasse des Gymnasiums



5.1 Einleitung

Spielsteine faszinieren seit Urzeiten. Zeigen sie mein Schicksal? Bringen sie mir Glück? Kann ich das Schicksal beeinflussen und mein Glück begünstigen? Das Wetter wird kaum besser; unsere Mannschaft wird sicher gewinnen; wahrscheinlich wird nichts ändern, aber der Tod ist uns gewiss. In unserer Alltagssprache kennen wir ein ganzes Repertoire von Ausdrücken für unser Mass an Gewissheit oder Ungewissheit, Sicherheit oder eben Unsicherheit. Und wenn es um Würfelspiele geht, so glauben wir, mit diesen Begriffen umgehen zu können. Ein Sechstel beträgt die Wahrscheinlichkeit, mit einem Spielwürfel eine 6 zu werfen, zwei Sechstel beträgt diese Wahrscheinlichkeit, wenn wir zweimal werfen usw. Spätestens mit dem siebten Wurf beginnen wir zu stutzen, denn dann müsste ja unsere Chance 7/6 betragen. Wir merken: So kann es nicht gehen. „Da steckt eine Gesetzmässigkeit dahinter, die wir noch nicht kennen“, formuliert ein Schüler treffend. Und genau um diese Gesetzmässigkeit soll es hier gehen, um die Klärung unseres intuitiven Begriffs der Wahrscheinlichkeit.

Weil er nicht hinter diese Gesetzmässigkeiten schaut, geschieht dem Chevalier de Méré um 1650 bei seinen Glücksspielen Unerwartetes. Er glaubt, sein bisher erfolgreiches Spiel leicht variieren zu können und ist völlig erstaunt, dass er jetzt mehrheitlich verliert. Für ihn stimmt die Mathematik nicht mehr mit dem praktischen Leben überein, er versteht die Welt nicht mehr. Da er diese Erfahrung nicht mit seinem proportionalen Denken erklären kann, wendet er sich verzweifelt an Blaise Pascal. Dieser beschäftigt sich intensiv mit dem Problem und zeigt, dass im Bereiche der Wahrscheinlichkeiten das proportionale Denken keine Gültigkeit hat. Dies ist die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung, einer mathematischen Disziplin, die sich mit der Beschreibung des Ungewissen befasst und ohne die unsere heutigen Natur- und Sozialwissenschaften undenkbar sind. Der Übergang vom intuitiven Erfassen der Chancen bis zum Verstehen und Umgehen mit Wahrscheinlichkeiten ist ein Quantensprung. Nach diesem Durchbruch erscheint uns auf dem neuen Hochplateau alles einleuchtend, logisch, ja selbstverständlich.

5.2 Vorlage von Rolf Schudel/Barbara Krzensk

Rolf Schudel und Barbara Krzensk haben im Zusammenhang mit der Berner Lehrkunstwerkstatt II ein gut 30 Lektionen umfassendes Lehrstück zur Wahrscheinlichkeit entwickelt und in mehreren Aufführungen in Arbeitswochen wie im kursorischen Unterricht optimiert. Die vierte und letzte der in ihrem Bericht (Schudel/Krzensk 2001) erwähnte Inszenierung fand mit einer Klasse des 11. Schuljahres in einer Arbeitswoche statt. Rolf Schudel und Barbara Krzensk eröffneten ihr Lehrstück mit dem Roulettespiel und packenden Texten von Dostojewski zu Spieler und Spiel. Dieser spannende Einstieg führte mitten in Leidenschaft und Problematik des Glücksspiels und brachte gleichzeitig die Begegnung mit einem hervorragenden Roman der Weltliteratur. Im I. Akt folgten Spiele mit Astragali und gewöhnlichen Würfeln. So wurden „A-posteriori"- und „A-priori"-Wahrscheinlichkeit entwickelt, einander gegenübergestellt. Damit fand eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem Begriff „Wahrscheinlichkeit" statt. Der II. Akt war dem Problem des Chevalier de Méré und den mehrstufigen Zufallsversuchen samt Baumdarstellung gewidmet. Hier wurde deutlich, warum das nahe liegende proportionale Denken bei mehrstufigen Zufallsversuchen versagt. Es erfolgte eine theoretische Fundierung des Erarbeiteten. Im III. Akt wuchsen die Bäume mit dem Galton-Brett und der Binomialverteilung in den Himmel. Als Zwischengang am Abend folgte die Überraschung mit dem Ziegenspiel. (Zwei Ziegen und ein Auto sind hinter drei Türen versteckt. Der Kanndidat wählt eine Türe, diese wird aber nicht geöffnet, sondern der Spielleiter öffnet eine andere Türe in der eine Ziege erscheint. Soll der Kandidat bei seiner Wahl bleiben oder soll er wechseln und auf die andere Türe setzen, um das Auto zu gewinnen?) Schliesslich wurde die Thematik im IV. und letzten Akt mit interessanten Problemen auf weitere Situationen ausgedehnt. Die Schülerinnen und Schüler wurden dabei herausgefordert, das Gelernte zu übertragen und dann das Erarbeitete zu präsentieren. Der Prozess setzte sich im Schulalltag fort. Nach den letzten Präsentationen folgten Erwartungswert, Übungen, Probe.

Meines Erachtens liegt hier eine spannende, historisch und kulturell reichhaltige Unterrichtseinheit vor, welche die Lernenden vielfältig und aktiv in die Auseinandersetzung um die Wahrscheinlichkeit einbezieht. Dank der Übungen mit Bezügen zu verschiedensten Anwendungen ergibt sich schliesslich eine fundierte Erarbeitung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im Fazit schreiben die beiden Autoren selbstkritisch über das Lehrstück: „Es ist zu lang. … Die Überlänge macht es auch sehr schwierig, den Spannungsbogen aufrecht zu erhalten, was sich vor allem im kursorischen Unterricht als ein Ding der Unmöglichkeit gezeigt hat. Ungewohnt für ein Lehrstück sind die integrierten Übungsphasen, die ich aber auf Grund der positiven Erfahrungen nicht missen möchte." Dieses Lehrstück orientiert sich, wie übrigens auch meine Lehrstücke „Quadrate vereinen – Quadrate entzweien" und „Vom Würfel zur Kugel" an einer ganzen Unterrichtseinheit des Lehrplans. Dadurch wird dieses Lehrstück extrem lang. Die Einheit wird bestimmt durch ein Oberthema, aber kaum durch eine Grundproblematik, welche immer weiter vertieft wird und in Variationen das ganze Stück durchzieht. Eine Abrundung, ein gelungener Abschluss mit Ausblick will nicht gelingen.

Im Rahmen einer Präsentation dieses Lehrstücks in Marburg tauchte die Frage auf, warum die zentralen Spiele von de Méré nicht gespielt werden. Ein Versuch zeigte, dass diese Spiele attraktiv sind und direkt zur Geburtsstunde der Mathematik führen. Diese Erfahrung war Ausgangspunkt zur Entwicklung meines heutigen Lehrstücks. – In einem Nachgespräch im Dezember 2003 hat mir Rolf Schudel sein Unbehagen mit der Länge dieses Lehrstücks bestätigt. Er war sehr angetan von meinem kürzeren, kompakteren und einheitlicheren Lehrstück, das auf den Spielen von de Méré aufgebaut ist und die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung ins Zentrum stellt. Wir sind beide der Ansicht, dass in der Mathematik die Zukunft eher den kürzeren Lehrstücken gilt, welche ein besonderes Menschheitsrätsel fokussieren. Zwar schmerzt es, dass das Roulette mit den Texten von Dostojewski wegfällt, doch kann es später im „Normalunterricht“ eingebracht werden. Idealerweise, da waren wir uns einig, wird dieses kurze Lehrstück später ergänzt durch ein noch zu entwickelndes Lehrstück zur statistischen Wahrscheinlichkeit mit den Astragali und mit Bernoulli.

5.3 Struktur des Lehrstücks

Ouvertüre:
Astragali, ägyptische Würfel aus der Pharaonenzeit und gewöhnliche Spielwürfel liegen auf dem Tisch in der Mitte. Unsere regelmässigen Würfel sind vermutlich durch Abschleifen aus den Astragali entstanden. Hier liegen von den ältesten Spielsteinen der Welt. Gespielt wird schon seit Urzeiten. Astragali und Würfel wurden auch für Orakel verwendet. „Alea iacta est.“ Caesar liess den Würfel fallen, bevor er Rom eroberte. Die Kleider von Christus wurden durch Würfelentscheid verteilt. Auch wir überlassen ab und zu eine Entscheidung dem Zufallswurf. Aus Fragestellungen beim Glücksspiel hat sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt. Wahrscheinlichkeit und Statistik sind heute in den verschiedensten Bereichen ein unverzichtbares Instrument.

I. Akt: De Mérés Frage
Wir versetzen uns in die Mitte des 17. Jahrhunderts, in die Zeit des Sonnenkönigs Louis XIV. Chevalier de Méré, ein französischer Lebemann, preist in den Salons sein Spiel an: Der Spieler gewinnt, wenn er in vier Würfen keine Sechs wirft. Das Bild eines Salons und des Schlosses von Versailles sowie Musik von Jean-Baptiste Lully bilden den Rahmen. In Gruppen wird gespielt und gleichzeitig der Spielverlauf protokolliert. Dann sammeln wir die Resultate und äussern erste Vermutungen. Es heisst, de Méré hätte gut gelebt mit diesem Spiel, aber auf die Dauer sei es ihm langweilig geworden. Er will zu Doppelwürfen übergehen: Aber wie? Es wird ausprobiert, nachgedacht, verschiedene Ideen werden diskutiert. De Méré hat folgendermassen argumentiert und das Spiel verändert: Die Zahl der Würfe ist im ersten Fall 4, die Zahl der Möglichkeiten 6. Im zweiten Fall haben wir entsprechend $6 \cdot 4 = 24$ Würfe bei insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten. Und wieder ist das Verhältnis $4 : 6$. Also sollten die Gewinnchancen dieselben sein wie im ersten Spiel. In Gruppen wird das zweite Spiel von de Méré gespielt und protokolliert. Die Anzahl der Spiele ist nur klein, aber die Spielidee wird dabei klar. Tatsache ist, dass auf die Dauer de Méré beim ersten Spiel gewinnt und wider Erwarten beim zweiten Spiel verliert. Verzweifelt wendet er sich an Blaise Pascal: „Ich verstehe die Welt nicht mehr!“ Die Schülerinnen und Schüler schreiben für de Méré einen substantiellen Klagebrief an Pascal, in dem er darlegt und begründet, was er überlegt hat, und darüber jammert, dass es anders gekommen ist. De Mérés Brief ist leider nicht erhalten; aber sein Brief hat die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgelöst.

II. Akt: Pascals Antwort - Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Warum wendet er sich gerade an Pascal? Ich informiere über das Universalgenie Blaise Pascal und sein Umfeld. Die Briefe an Pascal hängen an der Tafel und werden vorgestellt. Wie mag Pascal überlegt haben? In Gruppen werden vorerst Hypothesen aufgestellt und diskutiert. Im anschliessenden Plenum werden die Argumente gesammelt, diskutiert und abgewogen. Die intensive Auseinandersetzung über das erste Spiel, über das wiederholte Werfen mit einem Würfel, wird zum Schlüssel für das Verständnis auch des zweiten Spiels. Nach und nach ergibt sich des Rätsels Lösung. Bäume und Pfade helfen zum besseren Verständnis, begründen, warum wir bei mehrstufigen Versuchen die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren

und nicht addieren. An Stelle von Blaise Pascal schreiben die Schülerinnen und Schüler einen ausführlichen Antwortbrief an de Méré.

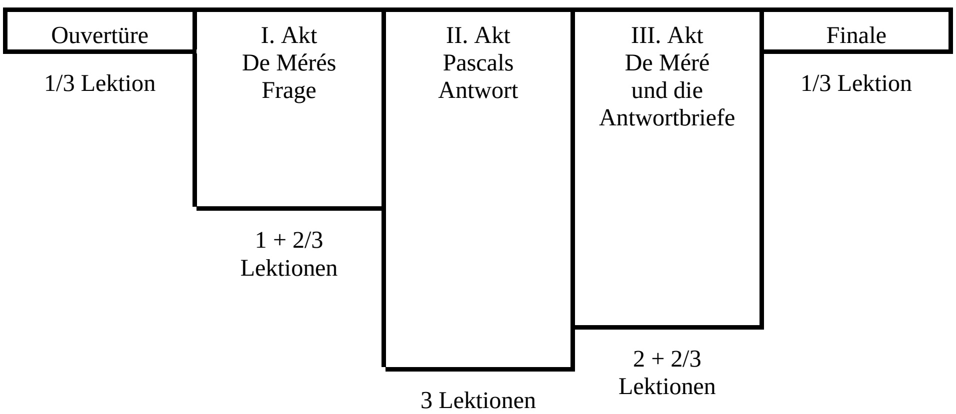
3. Akt: De Méré und die Antwortbriefe
Die Antwortbriefe treffen ein und werden studiert. Darunter ist auch einer von mir samt ein paar neuen Spielanregungen. Bei der Auseinandersetzung mit diesen Briefen und der Entwicklung neuer, besonders geeigneter Spiele erfährt der Umgang mit der Wahrscheinlichkeit weitere Klärung und Vertiefung.

Finale: Zusammenfassung und Ausblick
Ein Blick in unsere Alltagssprache und Ausschnitte aus den fiktiven Briefen von Pascal an Fermat, geschrieben von Alfréd Rényi, runden das Lehrstück ab.
Ausblick: Wäre aus Rom ein Brief gekommen mit einer Frage zum Knobelbecherspiel mit den Astragali, so hätte Pascal die Frage nach Basel weiterleiten können, wo sich dann Jakob Bernoulli gute fünfzig Jahre später damit befasst hätte. So wird das Lehrstück zur Quelle der Fortsetzung (Wahrscheinlichkeitsbegriff, Laplace-Versuch, Bernoulli,…)

5.4 Unterrichtsverlauf: 8 Lektionen in der Prima

Im Moment unterrichte ich keine eigene Prima (12. Schuljahr), aber einer meiner Fachkollegen, Heiner Rohner, der eben in der fachdidaktischen Ausbildung steckt, ist sehr interessiert, dass ich dieses Lehrstück in einer seiner beiden Primen durchführe. Aus stundenplantechnischen Gründen einigen wir uns auf die Klasse 1A. Dies hat für mich den Nachteil, dass ich die Schülerinnen und Schüler schlecht kenne, dafür den Vorteil, dass mein Kollege dabei ist und viel gleichzeitig protokolliert. Für den ersten Teil beantragen wir einen Blockhalbtag, das heisst, am Freitag, 31. Oktober 2002 beanspruchen wir vormittags vier Lektionen. Die folgende Woche wollen wir in den beiden Doppellektionen vom Montag und vom Freitag das Lehrstück fortsetzen und beenden.

Es wird sich die folgende zeitliche Gliederung ergeben:



Zu Beginn stehen 18 Stühle im Kreis bereit. Eine Schülerin wird wegen einer Exkursion abwesend sein. Rundherum gibt es fünf Pultblöcke als Spieltische. An der einen Wand hängen Informationen über antike Spielsteine, über de Méré und über Blaise Pascal. Im Zentrum am Boden liegen einige Astragali, griechisch-ägyptische Spielwürfel und gewöhnliche Spielwürfel unserer Zeit ausgebreitet. Die Schülerinnen und Schüler kommen nach und nach, setzen sich erwartungsvoll hin und harren der Dinge, die da kommen werden.

Lektionen 1/2

Ouvertüre

Ich begrüsse alle kurz. Es braucht wenig erklärende Worte. Ein Zitat von Pascal: „Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten“ leitet über zu einer kurzen Erläuterung unserer kleinen Unterrichtseinheit als Lehrstück. Dann weise ich auf die am Boden ausgelegten Spielsteine hin. Die Astragali, Knöchelchen der Hinterbeine von Paarhufern, mit ihrer besonderen Form

besitzen zwei Breit- und zwei Schmalseiten und wurden von den Menschen schon Tausende von Jahren vor Christus zum Spielen aber auch zur Vorhersage des Schicksals im Orakel genutzt. Homer erzählt in der Ilias, wie Achilles sich beim Spiel der Knöchel ereiferte. Aus späteren Zeiten kennen wir sogar Nachbildungen in Ton, Bronze, Silber und Gold. Noch heute werden diese Knöchelchen in verschiedensten Ländern zum Spielen verwendet! Die alten griechisch-ägyptischen Würfel aus der Pharaonenzeit ähneln schon viel eher unseren bekannten regelmässigen Spielwürfeln. Aus der Bibel wissen wir, dass die Kleider von Jesus mittels Würfelspiel unter die Soldaten verteilt wurden. 49 vor Christus soll Caesar den Ausspruch getan haben: „Alea iacta est – Der Würfel ist gefallen“, nachdem er sich entschlossen hatte, den Grenzfluss Rubikon zu überschreiten und mit seinem Heer in Rom einzumarschieren. Noch heute wird dieser Ausspruch gebraucht im Zusammenhang mit folgenschweren Entscheidungen, welche nicht mehr zurückgenommen werden können. Im Rom der Kaiserzeit waren die Leute ausserordentlich spielsüchtig. Es wurde um Hof, Frau und Kind gespielt, so dass das Glücksspiel mit Astragalen und Würfeln von Staates wegen (leges aleariae) verboten werden musste. (Ineichen 1996, S. 50f)

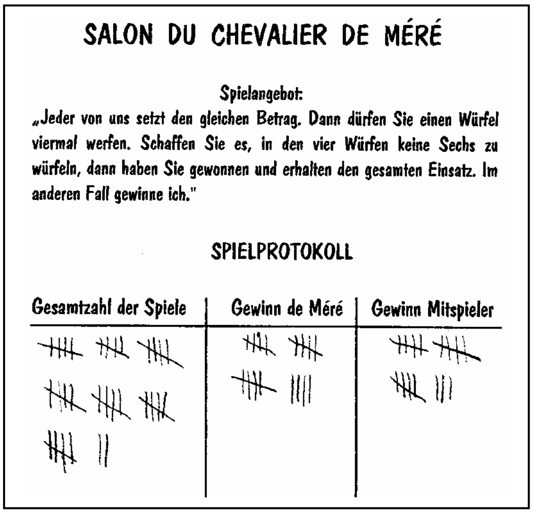
Ein Menschheitsthema sind Fragen rund um das Spiel und das Schicksal, die ja eng miteinander verknüpft sind: Ist das Spiel vorteilhaft für mich? Ist das Schicksal günstig? Welche Gesetzmässigkeit steckt hinter dem Würfeln? Lässt sich die Zukunft vorhersagen? Lassen sich die Ausfälle manipulieren, lässt sich die Zukunft steuern? Die Frage nach der Voraussagbarkeit bei Spielen war dann auch der Anlass zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Anwendung sich auf die verschiedensten Lebensbereiche ausgeweitet hat.

Mit dieser viertelstündigen Ouvertüre wird der kulturelle Horizont geöffnet und die Kernfrage gestellt.

I. Akt: De Mérés Frage

Musik von Jean-Baptiste Lully (1632-1687) ertönt aus dem Hintergrund und liefert den roten Faden. Ich schildere die Situation in der Mitte des 17. Jahrhunderts in Frankreich. Der Sonnenkönig Louis XIV hat eben in jungen Jahren die Krone übernommen. Das rationale Denken ist im Vormarsch mit Descartes, Leibniz und Spinoza. Es ist die Zeit von Molière, Corneille, Racine, La Fontaine. Ein Adliger namens Chevalier de Méré lebt in Paris, verkehrt in guter Gesellschaft und bietet in den Salons ein beliebtes Glückspiel an. Sein Bild erscheint jetzt an die Leinwand projiziert. Ich lege mir einen weissen Schal um und fahre fort als de Méré. „Ich biete Ihnen das folgende Spiel an: Wir legen beide einen gleich grossen Einsatz auf den Tisch und Sie dürfen viermal mit einem Würfel werfen.“ Während ich dies sage, lege ich eine Münze auf den Tisch, mein Kollege macht dasselbe und beginnt einen Würfel zu werfen. „Wenn Sie keine Sechs werfen, haben Sie gewonnen und bekommen die beiden Münzen auf dem Tisch, andernfalls erhalte ich die Münzen.“ Mein Kollege wirft keine Sechs und kann die beiden Münzen einziehen. Das Spiel scheint klar zu sein. Wir verteilen die Rollen: An jedem Spieltisch gibt es einen de Méré mit Halstuch, einen Protokollanten mit Protokollblatt, der die Zahl der gewonnenen Spiele notiert, und ein bis zwei Spieler. Die de Mérés nehmen hinter den Tischen Platz und die Spieler davor. Die Protokollanten samt Spielbeschreibung und Tabelle sitzen bereit. Die Spiele beginnen. Es herrscht eine lockere, aber konzentrierte Atmosphäre. Die Musik von Lully begleitet das Geschehen aus dem Hintergrund.

Mein Kollege und ich schnappen beim Beobachten ein paar Sätze auf. Christoph S meint: „De Méré gewinnt sicher, er bietet das Spiel ja an.“ Lisa kann kaum glauben, dass jemals zwei Sechser hintereinander kommen: „Zweimal eine Sechs, das ist ja gestört.“ Christoph S denkt ans Casino: „Wollen wir es nicht mit Geld machen, das wäre viel lustiger.“ Thomas ist auf Erfolgskurs: „Der Würfel ist sicher gezinkt. Ich habe noch nie verloren, was mache ich nur falsch?“ Manuel kontert: „Das stimmt nicht, einmal hast du verloren; ich aber verliere die ganze Zeit.“ Thomas: „Jetzt sollte ich aufhören.“ In einer andern Gruppe hören wir Linda: „Willst du nicht alle Würfel zugleich werfen?“ Eva erwidert: „Das ist nicht gut, mit allen Würfeln zugleich, das bringt Unglück.“ Alain sieht das rationaler: „Das kommt doch nicht drauf an. De Méré muss ja bankrott gegangen sein.“ Eva: „Eher nicht, sonst hätte er ja nicht gespielt.“ Alain meint in Bezug auf de Méré: „Schau ihn an, der schwimmt im Geld.“ Linda: „De Méré sollte nicht jedes Mal gewinnen, sonst spielen die Leute nicht mehr mit ihm.“ Oliver setzt



SALON DU CHEVALIER DE MÉRÉ

Spielangebot:

„Jeder von uns setzt den gleichen Betrag. Dann dürfen Sie einen Würfel viermal werfen. Schaffen Sie es, in den vier Würfen keine Sechs zu würfeln, dann haben Sie gewonnen und erhalten den gesamten Einsatz. Im anderen Fall gewinne ich."

SPIELPROTOKOLL

Gesamtzahl der Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Mitspieler

so viel, dass de Méré bankrott gehen könnte; er würfelt aber beim letzten Wurf eine 6 und verliert.

Ich beobachte die Protokolle aus dem Hintergrund; es zeigt sich keine eindeutige Tendenz. Nach gut zehn Minuten bitte ich in den Kreis und lasse die Schreiber ihre Zahlen in die an der Tafel vorbereitete Tabelle eintragen:

Erstes Spiel:

Tisch	Anzahl Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Spieler
1	37	19	18
2	61	39	22
3	56	23	33
4	140	65	75
5	33	16	17
Comp.	10’000	5’107	4’893

„Können wir irgendwelche Schlüsse ziehen?“ Thomas: „De Méré kann einpacken, er macht Konkurs.“ Reto: „Die Wahrscheinlichkeit ist grösser, dass der Spieler gewinnt; in den meisten Fällen haben die Spieler gewonnen, also ist das Spiel für de Méré nicht rentabel.“ Niemand kommt auf die Idee, alles zusammenzuzählen. Mit 162 Gewinnen für de Méré und 165 Gewinnen für die Spieler haben wir eine sehr ausgeglichene Bilanz. Ich komme zu den Realitäten: „Tatsache ist, dass de Méré sehr viel gespielt hat und sich mit diesem Spiel einen luxuriösen Lebenstil finanzieren konnte. Eine Computersimulation mit 10'000 Spielen hat 5107 Gewinne für de Méré und 4893 Gewinne für die Spieler ergeben.“ Reto erklärt sich dies so: „Wir haben nur ca. 500-mal gespielt, evtl. hat er ja später umso mehr gewonnen.“ Thomas ergänzt: „Das ist halt der Zufall.“ Weitere Erklärungen sind im Moment nicht vorhanden.

Statt jetzt schon tiefer in die Diskussion dieses Ergebnisses einzusteigen, erläutere ich, dass de Méré und den Leuten dieses Spiel auf die Dauer zu langweilig wurde und er ein Spiel mit Doppelwürfen anbieten wollte. Wieder mit dem weissen Tuch um den Hals nehme ich in die rechte Hand einen Würfel und in die linke zwei. Laut denkend werfe ich mit der rechten Hand viermal hintereinander den Würfel: „Viermal werfen und mindestens eine Sechs, dann gewinne ich.“ Dann werfe ich einige Male die beiden Würfel aus der linken Hand: „Werfen mit zwei Würfeln und mindestens eine Doppelsechs erzielen. Wie oft sollen wir wohl werfen? Doppelt so oft, also achtmal, oder vier im Quadrat, also sechzehn Mal, oder sechs Mal mehr, also vierundzwanzig Mal, oder vielleicht dreissig oder gar sechsunddreissig Mal? Wie oft soll ich nur werfen lassen?“ Die Schülerinnen und Schüler bitte ich in kleine Gruppen an die Tische, um diese Frage zu diskutieren und allenfalls auszuprobieren.

In verschiedenen Gruppen wird eifrig diskutiert, so z.B. zwischen Christian K, Lisa und Kathrin. Lisa wirft beim ersten Wurf eine Doppelsechs. Katrin: „Wir probieren es einmal mit 8 Würfen.“ Christian K: „Die Doppelsechs ist aber sehr selten.“ Katrin: „Dann sind natürlich 8 Würfe viel zu wenig.“ Christian K: „Die Wahrscheinlichkeit einer Doppelsechs ist $1/6 \cdot 1/6$, also müssen wir 16-mal werfen.“ Katrin: „Dann sind aber auch 16 Würfe sehr wenig.“ Christian K: „Also versuchen wir es einmal mit 36 Würfen.“ Katrin hat geworfen und vermeldet: „Nach 13 Würfen kam zum ersten Mal eine Doppelsechs“ Christian K: „Ich würde sagen, es braucht 36 Würfe“ Katrin: „Jetzt hatte ich nach 14 Würfen eine Doppelsechs.“ …

Nach gut fünf Minuten gebe ich ein Glockenzeichen und wir treffen uns wieder in der Runde. Ich erkundige mich: „Wie soll die Spielvorgabe lauten?“
Christian K meint: „36-mal, nach 36 Würfen sollte gemäss Kombinatorik eine Doppelsechs kommen.“
Anna: „Ich kann mir nicht vorstellen, dass in 36 Würfen immer eine Doppelsechs kommt.“
Reto: „Es wäre nicht gut, 36-mal zu spielen, sonst würde de Méré zu oft gewinnen.“

Anna: „Es kann gut sein, dass man in 36 Würfen nie eine Doppelsechs wirft.“
Reto: „Ich würde 20 Würfe wählen; dann haben die Leute eine Chance.“
Simone: „6-mal mit einem Würfel wäre das Gleiche wie 36-mal mit zwei Würfeln.“
Stefan: „2/3 von 36 sind 24, ich würde mit 24 Würfen spielen.“
Die Schülerinnen und Schüler sind sich nicht einig, eine Entscheidung wird intuitiv gefällt. Ich bringe Tatsachen: „De Méré hat wie Stefan überlegt: Mit zwei Würfeln gibt es sechsmal mehr Möglichkeiten, also muss ich mit $4 \cdot 6 = 24$ Würfen spielen und gewinne mit derselben Chance.“ Kurz vor neun Uhr werden neue de Mérés und Protokollführer bestimmt und die Spielregeln an der Tafel veröffentlicht. Die Gruppen beginnen in geänderter Zusammensetzung mit dem zweiten Spiel.

Aus der Gruppe mit Simone, Graziella und Reto vernehmen wir Graziella: „Gewonnen!“ Simone: „Wir würfeln beide, dann geht es etwas schneller! – Gibt es überhaupt eine 6 auf dem Würfel?“ Graziella ruft: „de Méré“ (Es steht 5 : 1 gegen de Méré) Graziella: „Das ist wie Beschäftigungstherapie“
In einer andern Gruppe gerät Alain als de Méré in den Spielrausch: „Da könnte man vom Tellerwäscher zum Millionär werden.“ Eva zu Olivier: „Schau doch, du verlierst die ganze Zeit.“ Der Spieler ist um 4 Gewinne im Rückstand. Alain: „Diese Spielsucht ist grausam.“ Die Spielenden beginnen höhere Einsätze zu wagen und wenige Minuten später hat Alain als de Méré sein ganzes Vermögen verspielt.

SALON DU CHEVALIER DE MÉRÉ

Das neue Spielangebot:

„Jeder von uns setzt den gleichen Betrag. Dann dürfen Sie 24-mal mit zwei Würfeln werfen. Schaffen Sie es, in den 24 Würfen keine Doppel-Sechs zu werfen, dann haben Sie gewonnen und erhalten den gesamten Einsatz. Sollte jedoch mindestens eine Doppel-Sechs dabei sein, dann habe ich gewonnen.“

SPIELPROTOKOLL

Gesamtzahl der Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Mitspieler

Nach einer knappen Viertelstunde treffen wir uns wieder in der Runde. Die Resultate stehen vor uns an der Tafel. Lisa: „De Méré gewinnt öfter und wird langfristig mehr verdienen.“ Samuel: „Auch dies könnte nur Zufall sein.“ Ich möchte wissen, ob diese Spiele attraktiv sind. Anna meint: „Durch die längere Spieldauer setzen die Spieler mutiger.“ Die Addition der Kolonnen ergäbe einen Spielgewinn von 72 für de Méré gegenüber 62 für die Spieler. Als Zusatzinformation erwähne ich erneut eine Computersimulation: Diese lieferte 4927 Gewinne für de Méré gegenüber 5073 Gewinnen für die Spieler. Reto: „Das Ziel hat de Méré nur knapp verfehlt.“ Anna: „Dies kann so isoliert nicht beurteilt werden; mag sein, dass in den 4927 Spielen der Einsatz viel höher war.“

Zweites Spiel

Tisch	Anzahl Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Spieler
1	9	4	5
2	19	11	8
3	24	15	9
4	45	22	23
5	37	20	17
Comp.	10’000	4’927	5’073

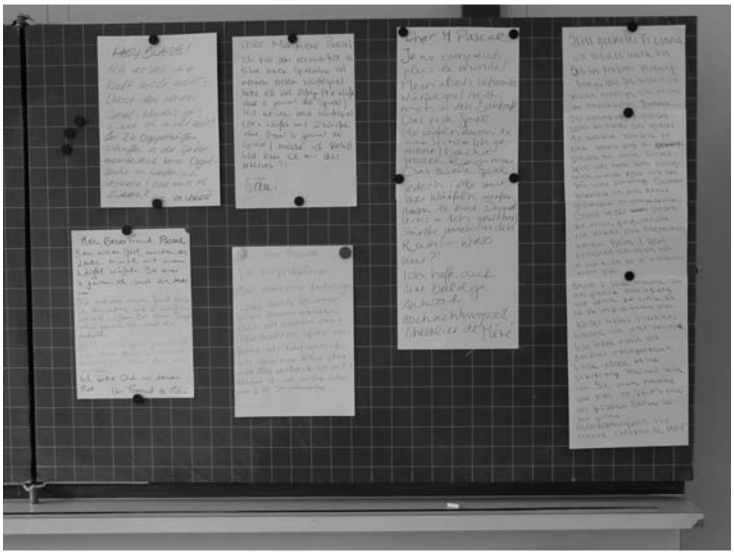
Ich ergänze: „Faktum ist, dass de Méré auf die Dauer mehr und mehr Geld verlor und sich verschuldete. Er war fest überzeugt gewesen, genauso wie im ersten Spiel gewinnen zu müssen. Er verstand die Welt nicht mehr! In seiner Verzweiflung wandte er sich mit einem Brief an Pascal. Dieser war ein Freund von Chevalier de Méré und gilt noch heute als bedeutender Mathematiker.“

Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag, in Zweier- oder Dreiergruppen auf A3-Papier einen Brief an Pascal zu formulieren, in dem de Méré seine verzweifelte Situation möglichst klar schildert und Pascal konkret um Hilfe bittet. Nach gut zehn Minuten werden die ersten Briefe an die Wandtafel fixiert. Neunzig Minuten sind vorbei, eine halbstündige Pause ist verdient.

Mit der Ouvertüre und dem ersten Akt bin ich sehr zufrieden. Die Schülerinnen und Schüler haben gut mitgemacht, haben das Problem erkannt und als Ausgangspunkt für den zweiten Akt formuliert. Es ist immer wieder eindrücklich zu erleben, wie schwierig es ist, mit diesem intuitiven Begriff von Wahrscheinlichkeit umzugehen. Bei einer nächsten Inszenierung will ich nach den Spielen den Computer laufen lassen, bei dem sichtbar wird, wie sich die Verhältnisse entwickeln mit wachsender Zahl der Spiele. Unsere Versuchsserien sind so klein und die Wahrscheinlichkeiten so ausgeglichen, dass oft Ergebnisse herauskommen, welche den wahren Verlauf nicht aufzeigen. Trotzdem sind die Spielerfahrungen wichtig, um konkret über diese Spiele diskutieren zu können.

Lektionen 3/4

2. Akt:
Pascals Antwort – Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung



Nach der Pause, um 10.00h, beginnen wir den zweiten Akt. Die vier Briefe sind an der Wandtafel mit Magneten befestigt. Da in diesem Akt Blaise Pascal Adressat ist und im Zentrum steht, will ich vorerst über ihn informieren. Die Schülerinnen und Schüler sind ihm im Französischunterricht bislang nicht begegnet. Der Französischlehrer hat mir vorgängig erklärt, dass er im Moment kaum Zeit fände, Pascal in seinen Unterricht einzuflechten. An der Leinwand leuchtet bereits ein Bild von Pascal. Hinten an der Wand habe ich mehrere Bilder aufgehängt, welche auf wichtige Stationen in seinem Leben hinweisen. Ich projiziere eine Chronologie seines Lebens und erzähle über Pascal. Im Wesentlichen erwähne ich das, was ich dann am Ende des Morgens den Schülerinnen und Schülern als Kurzportrait schriftlich abgeben werde. (→ vgl. Kurzportrait auf der folgenden Seite.)

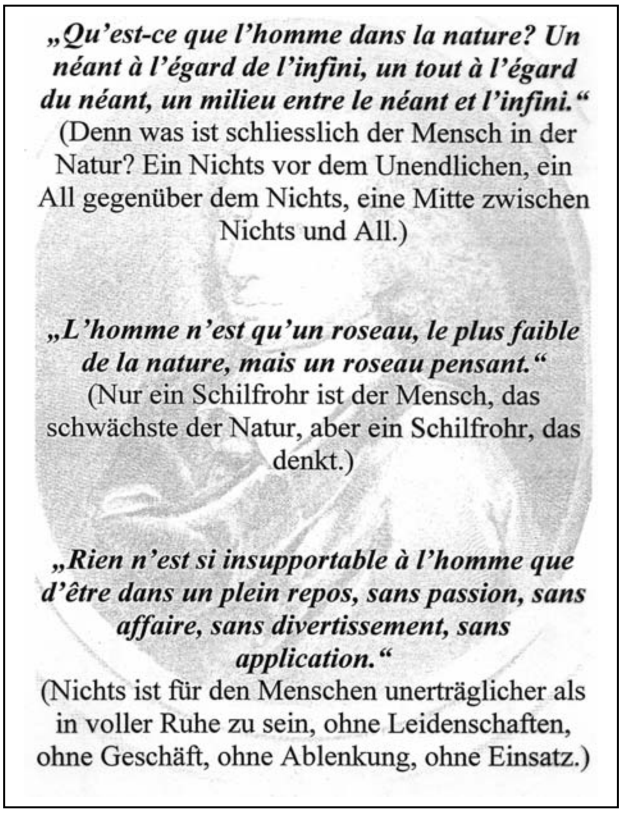
Kurzportrait von Blaise Pascal (1623 – 1662)

BLAISE PASCAL wird 1623 im heutigen Clermont-Ferrand (Auvergne) geboren, am Fusse des erloschenen Vulkans Puy de Dôme, Seine Mutter stirbt, als Blaise erst dreijährig ist. Der Vater, ein umfassend gebildeter Mensch und Präsident des Finanzgerichtshofs, erzieht und unterrichtet seinen Sohn und die beiden Töchter selbst. Bereits in jungen Jahren zeigt Blaise Pascal ausserordentliche Begabung. Mit 16 Jahren schreibt er eine Abhandlung über Kegelschnitte und mit 19 ist er intensiv an der Entwicklung einer Rechenmaschine. Erste Anzeichen einer ernsthaften Erkrankung machen sich allerdings bemerkbar. Zu dieser Zeit besteigt Ludwig XIV, der Sonnenkönig, den Thron. Mit bahnbrechenden Experimenten am Puy de Dôme beweist Pascal 1646, dass der Luftdruck mit der Höhe abnimmt, dass also das Gegengewicht der Luft den Stand der Quecksilbersäule bestimmt. Damit ist die Lehre von Aristoteles widerlegt, nach der ein luftleerer Raum auf Grund des *horror vacui* (des Abscheues vor der Leere) unmöglich ist. In wissenschaftlichen Fragen steht Pascal entschlossen an der Seite der experimentellen Methode und des vorurteilsfreien logischen Denkens. Daneben ist er jedoch davon überzeugt, dass in den Fragen der Religion das Denken nicht genüge, um zur Wahrheit zu gelangen; dazu brauche man auch die Hilfe des Glaubens.
In den Jahren 1652 bis 1654 entstehen Abhandlungen über das Gleichgewicht bei Flüssigkeiten, über das Gewicht der Luft, über das arithmetische Dreieck (heute sog. Pascal'sches Dreieck) und Vorarbeiten zur Infinitesimalrechnung. Angeregt durch die Fragestellungen von de Méré legen Pascal und sein Freund Fermat in ihrem Briefwechsel den Grundstein für die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung. Pascal wird aber zunehmend von seiner Krankheit gequält, Gegen Ende des Jahres 1654 hat Pascal eine mystische Erleuchtung, welche ihn mit voller Energie in religiöse Auseinandersetzungen eingreifen lässt. Es entstehen seine geistvollen „Lettres Provinciales" und später seine „Pensées", eine geplante Verteidigung des Christentums, die er aber wegen seiner Krankheit und seinem Tod 1662 nicht mehr vollenden konnte. Es ist eine Sammlung von anregenden Gedanken zu Lebensweisheit, Religion und Philosophie.
Blaise Pascal hat in den Bereichen Mathematik und Physik Bedeutendes geleistet und ist einer der grössten religiösen Denker Frankreichs.

Quellen
Hans Loeffel: Blaise Pascal. Vita Mathematica. Birkhäuser Verlag 1987
Alfréd Rényi: Briefe über die Wahrscheinlichkeit. DVW

Das Leben von Blaise Pascal: eine Chronologie

1623 19. Juni Geboren in Clermont (Auvergne)
1626 Tod seiner Mutter
1631 Vater zieht mit den drei Kindern nach Paris
1642 Erste Anzeichen ernsthafter Erkrankung
1643 Louis XIV, der „Sonnenkönig" tritt sein Amt an.
1645 Präsentation einer funktionstüchtigen Rechenmaschine
1646 Erste Kontakte mit den Jansenisten
Experimente über den luftleeren Raum
1647 Pascal trifft Descartes
1648 Experimente über den Luftdruck auf dem Puy-de-Dome.
1651 Abhandlung über den luftleeren Raum.
1652 - „Weltliche Periode", Kontakt mit Chevalier de Méré
1654 Abhandlungen: Vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten/
Über das Gewicht der Luft
Über das arithmetische Dreieck (→ Pascal'sches Dreieck)
Vorarbeiten zur Infinitesimalrechnung
Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit Fermat)
1654 23. November: mystisches Erweckungserlebnis
1655 Rückzug nach Port-Royal
1656 Entstehung der Pensées (Apologie des Christentums)
1657ff Diverse Artikel zur Geometrie / Weiterführung der Pensées.
1662 Pascal stirbt im Alter von 39 Jahren.
1669 Erste Veröffentlichung der Pensées



„Qu'est-ce que l'homme dans la nature? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre le néant et l'infini."
(Denn was ist schliesslich der Mensch in der Natur? Ein Nichts vor dem Unendlichen, ein All gegenüber dem Nichts, eine Mitte zwischen Nichts und All.)

„L'homme n'est qu'un roseau, le plus faible de la nature, mais un roseau pensant."
(Nur ein Schilfrohr ist der Mensch, das schwächste der Natur, aber ein Schilfrohr, das denkt.)

„Rien n'est si insupportable à l'homme que d'être dans un plein repos, sans passion, sans affaire, sans divertissement, sans application."
(Nichts ist für den Menschen unerträglicher als in voller Ruhe zu sein, ohne Leidenschaften, ohne Geschäft, ohne Ablenkung, ohne Einsatz.)

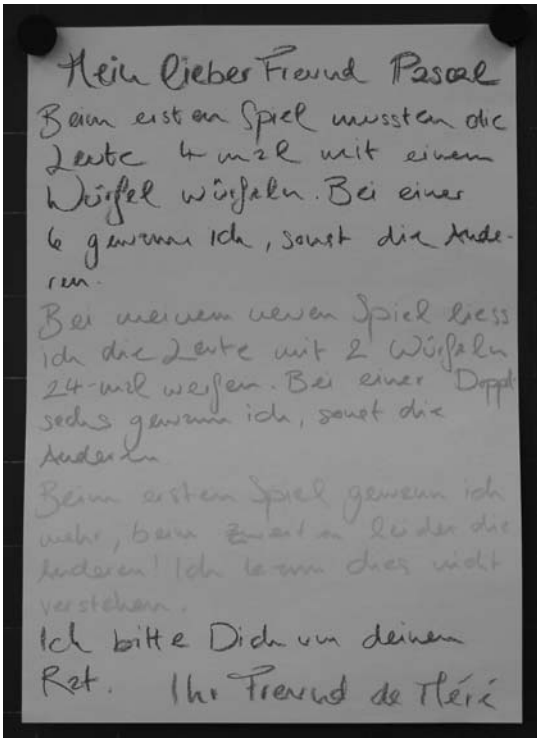
In Ergänzung dieses Lebenslaufs projiziere und kommentiere ich einige treffende Zitate aus seinen Schriften (→ vgl. Blaise Pascal, 2002, in seinen „Pensées"). Es sind Gedanken, die in engem Zusammenhang mit seinem tiefsinnigen Denken, seinen religiösen Gefühlen und seiner schwächlichen Gesundheit stehen. Weitere Sätze von Blaise Pascal sind an der Wand aufgehängt.

Und jetzt, im Sommer des Jahres 1654 erhält dieser Blaise Pascal von seinem Freund und Lebemann Chevalier de Méré diesen Brief. Wir lassen uns die Briefe vorlesen.

HEY BLAISE!
Ich versteh die Welt nicht mehr: Durch den neuen Spiel-Modus gewinne ich nicht mehr!
Bei 24 Doppelwürfen schaffen es die Spieler mehrheitlich keine Doppelsechs zu werfen.
Ich verliere! Was muss ich ändern?
GR   DE MÉRÉ

Cher Monsieur Pascal
Ich bin verzweifelt. Ich führe einen Spielsalon. Mit meinem ersten Würfelspiel hatte ich viel Erfolg (4x Würfeln ohne 6 gewinnt der Spieler.) Mit meinem neuen Würfelspiel (24 x würfeln mit 2 Würfeln, ohne Doppelsechs gewinnt der Spieler) mache ich Verlust. Wie kann ich mir das erklären?!
Sämi

Cher M. Pascal
Je ne comprends plus le monde! Mein allseits bekanntes Würfelspiel treibt mich in den Bankrott! Das erste Spiel (4 x würfeln, davon 1 x eine Sechs = Ich gewinne) brachte grossen Reichtum. Das zweite Spiel jedoch (24 x mit zwei Würfeln werfen, davon 1 x eine Doppelsechs = ich gewinne) stürzte mich in den Ruin! – Wieso nur?!
Ich hoffe auf ihre baldige Antwort.
Hochachtungsvoll
Chevalier de Méré



Mein lieber Freund Pascal
Beim ersten Spiel mussten die Leute 4-mal mit einem Würfel würfeln. Bei einer 6 gewinne ich, sonst die Anderen.
Bei meinem neuen Spiel liess ich die Leute mit 2 Würfeln 24-mal werfen. Bei einer Doppelsechs gewinne ich, sonst die Anderen.
Beim ersten Spiel gewann ich mehr, beim Zweiten leider die Anderen! Ich kann dies nicht verstehen.
Ich bitte Dich um deinen Rat. Ihr Freund de Méré

Cher Pascal
J'ai un problème. Bei meinem bisherigen Spiel konnte ich immer einen Gewinn erzielen. Doch mit meinem neu überdachten Spiel verliere ich häufiger, als ich gewinne. Wieso ist es nicht dasselbe, ob ich mit 1 Würfel 4-mal würfle oder mit 2 Würfeln 24-mal würfle?

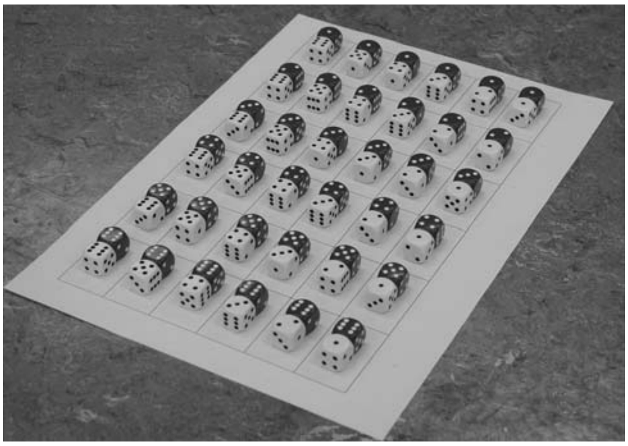
Sehr geehrter Freund,
ich wende mich an Sie in tiefster Verzweiflung. Wie Sie sicher wissen, betätige ich mich im Glücksspiel. Bei meinem 1. Glücksspiel konnte der Spieler 4x würfeln. Würfelte er eine Sechs ging der Einsatz an mich. Dieses war zwar sehr erfolgreich, wurde aber mit der Zeit sehr einseitig. Deshalb beschloss ich ein neues Glücksspiel zu entwickeln. Damit der Einsatz an mich ging, musste ein Spieler eine Doppelsechs werfen. Beim 1. Spiel entschied ich mich für 4 Würfe, da es ja 6 Möglichkeiten gibt. Beim 2. Spiel machte ich die gleiche Überlegung und wählte 24 Würfe, da es 36 Möglichkeiten gibt. Wider Erwarten machte ich jetzt Verlust. Ich habe noch oft darüber nachgedacht, finde jedoch keine Erklärung. Hiermit bitte ich Sie mein Freund um Rat, da Sie als einer der grössten Denker der Zeit gelten.
Hochachtungsvoll — Ihr Freund Chevalier de Méré

Pascal wird sehr angeregt durch diese Briefe. Was mag er wohl überlegt haben? Ein neuer Auftrag ergeht an die Schülerschaft: In Vierergruppen (gemischt aus verschiedenen Briefautoren) soll – wie es Pascal gemacht hat – studiert werden, was wohl an den Überlegungen von de Méré nicht stimmt. Es gilt, Argumente zu sammeln. Die Briefe hängen weiterhin zur Orientierung an der Tafel und bei den Tischen stehen Würfel zur Verfügung. Die Gruppen gehen intensiv dahinter. Es werden Meinungen ausgetauscht, neue Wurfversuche gemacht, Ideen geboren und wieder verworfen. Alain: „Die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Wurfes für keine Doppelsechs ist 35/36.“ Simone: „Es muss da einen neuen Aspekt geben, den wir noch nicht begriffen haben.“

Ein Gespräch aus der Gruppe mit Lisa, Eva, Graziella und Reto: „Ein Würfel, 6 Möglichkeiten.“ Eva: „Zwei Würfel, das muss kombiniert werden.“ Wiederum Reto: „Also 36 Möglichkeiten. Aber warum stimmt die Überlegung mit den 2/3 nicht? Man müsste wohl mit den 35 „Nicht-Doppel-6“ gearbeitet werden.“ Graziella fragt nach: „Warum gerade 35?“ … Eine Gruppe hat sich bereits Gleichungen notiert und diese mit Logarithmen gelöst. Dort scheint Einigkeit zu bestehen.

Nach gut 20 Minuten ruft die Glocke wieder zum Plenum. Ich eröffne die Runde mit der Frage: „Was hat sich Pascal überlegt?“ und spreche damit Manuel aus der schwächsten Gruppe an. Dieser antwortet: „Mit zwei Würfeln gleichzeitig eine 6 zu werfen, ist die Wahrscheinlichkeit viel geringer als mit einem Würfel eine 6 zu werfen.“ Ich frage nach: „Was verstehen Sie unter ‚Wahrscheinlichkeit?’“ Manuel: „Das ist ein Gefühl, gesunder Menschenverstand.“ Christian K aus der zweiten Gruppe meldet sich: „Zuerst betrachtet man das Spiel mit einem Würfel aus der Sicht des Spielers. Er hat die Chance 5/6, dass er gewinnt. Ich frage nach: „Was ist das, diese ‚Chance’?“ Christian K präzisiert: „Das ist die Wahrscheinlichkeit. Es gibt 5 gute Möglichkeiten und 6 insgesamt. Und für die weiteren Gänge muss man multiplizieren.“ Anna fragt nach: „Warum multiplizieren?“ Christian K selbstbewusst: „Es funktioniert mit Addieren nicht. Wir haben es probiert. Wenn wir 35/36 und 35/36 addieren, so gibt das schon mehr als eins. Mit zwei Würfeln ergibt sich die Gleichung $(35/36)^n < 0.5$.“ Voilà, das ist ein Schlag. Wer hat das wohl schon verstanden? Wir notieren diese Ungleichung an der Tafel. Da sich niemand regt, muss ich nachfragen: „Woher kommt diese Ungleichung?“ Anna erläutert: „Es gibt 36 Kombinationen mit 2 Würfeln, davon ist eines eine Doppelsechs.“ Ich lege ein Blatt mit 6 x 6 = 36 Feldern auf den Boden und leere eine Schachtel mit weissen und roten Würfeln. „Können wir diese 36 Kombinationen sehen?“ Stefan: „Es gibt jede Möglichkeit zweimal, also auch zwei Doppelsechsen.“ Michael: „Der rote Würfel ist zuerst, dann der weisse.“ Anna: „Es kommt darauf an, ob die Farbe unterschieden wird.“ Manuel: „Wenn sie nicht unterschieden werden, gibt es 18 Möglichkeiten.“

Anna und Stefan legen die Möglichkeiten aus. Da die beiden stöhnen, frage ich, ob jemand helfen möchte. Aber Christian S. antwortet schlagfertig: „Viele Köche verderben den Brei." Also bleibt es dabei.
Schweigend betrachten wir die Auslage eine Weile.
Reto meint: „Das sieht schön aus."
Stefan: „Die Chance ist 1 zu 36 für die Doppelsechs."
Anna: „Eigentlich gibt es nur 21 verschiedene Kombinationen." Zu meiner grossen Überraschung rechnet sie laut vor: „36 minus 6 durch 2 plus 6 ergibt 21"



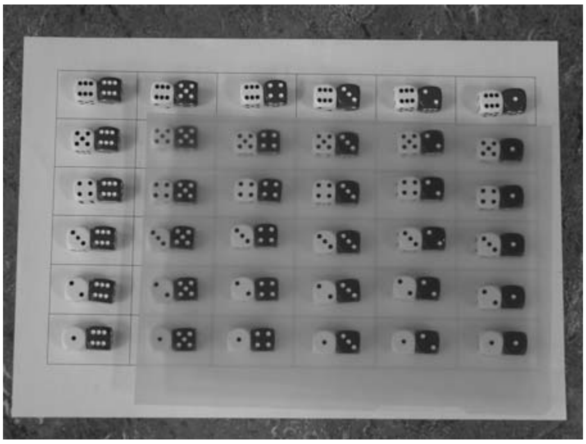
Simone protestiert: „Aber die gemischten Paare treten doppelt so oft auf."
Anna korrigiert sich: „Simone hat Recht, weil es für die gemischten Paare mehr Möglichkeiten gibt. Die Wahrscheinlichkeit für die gemischten Paare ist grösser."
Michael: „Das ist komisch, soll 4;3 öfter auftreten als 5;5?"
Anna: „Jeder Ausgang kommt gleich häufig vor, muss also einzeln gezählt werden. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für eine Doppelsechs 1/36." Dies ist eine klare Aussage. Die 36 gleich häufigen Paare liegen ja geordnet vor uns auf dem Boden. Es folgt eine längere Stille.

Da keine weiteren Fragen oder Reaktionen folgen, frage ich bei einer weiteren Gruppe nach den gewonnenen Erkenntnissen. Von Reto gibt es nichts Neues: „Wir haben die gleichen Überlegungen wir Christian K. Die Chance ist 5/6, dass es keine 6 gibt, und dann muss man die Chancen multiplizieren." Auch Anna vermeldet nichts Zusätzliches aus ihrer Gruppe. Ich frage nach: „Heisst dies jetzt, wir verstehen die Spiele?" Anna: „Warum müssen die Wahrscheinlichkeiten nicht addiert werden?" Olivier argumentiert: „Die Addition von 5/6 und 5/6 ergibt mehr als 1." Auch Simone fragt nach: „Die Multiplikation ist mir nicht klar." Es folgt keine weitere Antwort. Herausfordernd bemerke ich: „Ich höre, dass wir die 5/6 multiplizieren, weil's mit dem Addieren nicht funktioniert." „Richtig!" bestätigt mich Christian K. Reto: „Das ist ein Ausschlussverfahren. In der Kombinatorik, da kam auch jedes zu jedem, da wurde auch multipliziert." Lisa doppelt nach: „Das ist genau gleich wie in der Kombinatorik. Die Chancen werden multipliziert." Aus diesem Bereich hoffe ich auf eine zusätzliche Klärung und frage nach: „Haben Sie in der Kombinatorik von Chancen gesprochen?" Lisa entgegnet: „Nein, von Möglichkeiten." Ich erbitte ein Beispiel aus der Kombinatorik. Reto: „In der Kombinatorik haben wir uns gefragt: Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit 2 Würfeln keine 6 zu würfeln: $5 \cdot 5$?" „Und da wurde also multipliziert?", frage ich nach. Reto: „Ich kann zu jeder Möglichkeit des ersten Würfels jede Möglichkeit des zweiten erhalten." Alain verdeutlicht: Wenn der erste Würfel eine 1 zeigt, gibt es beim zweiten sechs Möglichkeiten. Gleich für jede Zahl des ersten Würfels, also 6 * 6." Meine Handbewegung verweist auf unsere ausgelegten roten und weissen Würfel. Reto: „Je öfter man wirft, desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit, nie eine 6 zu werfen. Dies erreicht man mit der Multiplikation von 5/6."

Ich blicke in die Runde: „Verstehen Sie das?" Christian S: „Einverstanden." Lisa: „Einverstanden. Durch die Multiplikation wird der Bruch kleiner." Samuel: „Solche Sachen muss man in der Mathematik einfach ‚anschauen'." Ob er das jetzt wirklich beim vorliegenden Modell sieht? Die Argumentationen überzeugen mich noch nicht. Deshalb versuche ich das Gespräch beim ersten Spiel zu halten. „Welche Ausgänge interessieren uns, wenn wir zweimal einen Würfel werfen?"

Hier ist es wichtig, konsequent beim ersten Spiel zu bleiben!!! Unsere Würfelauslegung stammt aus dem zweiten Spiel mit den Doppelwürfen, verdeutlicht aber auch sehr gut für das erste Spiel, was möglich ist, wenn wir zweimal mit einem Würfel werfen!

Alain: „Ist eine 6 dabei oder nicht?“ Christian K: „Wir erhalten diese Chance durch Multiplikation. Wir sehen das auch in der Tabelle mit den Doppelwürfen.“ Ich reiche ihm ein durchsichtiges Mäppchen und frage: „Wo sind sie?“ Christian K zögert, aber die andern rufen: „Drauflegen!“ Er legt das Mäppchen auf die Würfelpaare ohne 6. So sehen wir die 5 mal 5, also 25 derartigen Würfelpaare ohne 6. Jedes Mal wenn die erste Zahl keine 6 ist, gibt es insgesamt 5 Paare, die auch als zweite Zahl keine 6 besitzen. Wir betrachten diese Auslage eine Weile.



Jetzt glaube ich, mit der Klasse den Schritt zum dritten Wurf wagen zu können. „Wie könnten wir das für das dreimalige Werfen eines Würfels darstellen?“ Reto: „Hoch 3“ „Können wir uns das vorstellen?“ Christian S: „216 Möglichkeiten. Das gibt ein räumliches Gebilde.“ „Können Sie dieses Gebäude mit seinen Zimmern beschreiben?“ Christian S: „Es hat in jede Richtung 6 Zimmer, also insgesamt 216 Zimmer.“ Ich spinne die Geschichte weiter: „Wo fühlt sich der Spieler glücklich?“ Anna: „Wie beim Mäppchen, aber in der obersten Etage nicht.“ Meine Frage wurde verstanden. Michael sieht das Gebäude noch nicht: „Wie kommt man genau auf das Gebäude?“ Reto: „Es gibt 6·6·6 Möglichkeiten, dem Spieler gefällt es in 5·5·5, also 125 Zimmern.“ Diese Antwort scheint anzukommen.

Es bleiben nur noch 12 Minuten, um in neuen Gruppen einen Antwortbrief an de Méré zu verfassen, damit dieser die Welt wieder verstehen und sich im Spielsalon auffangen kann. Mit dem Verfassen dieses Briefes lässt sich das Diskutierte auf unsere beiden Spiele konzentrieren. Hoffentlich kann die eine oder andere auftauchende Frage in der Gruppe geklärt werden. Sollte der Brief nicht fertig werden, so bitte ich, ihn am Montag mitzubringen.

Vier Briefe werden am Ende der Doppelstunde abgegeben, ein fünfter soll am Montag folgen. Die Briefe sind eher kurz und bündig, enthalten aber die richtige Grundidee. Würde die Fortsetzung nicht am Montag stattfinden, hätte ich die Briefe jedem Einzelnen als Hausaufgabe gegeben. Dabei wären sicher substantiellere Briefe entstanden, so wie ich es letztes Jahr erlebt habe.

Cher de Méré
Dir ist sicherlich nicht klar, warum wir die Wahrscheinlichkeit multiplizieren.
Münzenbeispiel: Bei einem Wurf besteht die Wahrscheinlichkeit, dass nicht der Kopf geworfen wird bei 1/2. Bei 2 geworfenen Münzen besteht die Wahrscheinlichkeit 1/4 (= 1/2·1/2)

Sehr geehrter Freund,
Ich habe mich Ihrem Problem angenommen. Lassen Sie die Spieler mindestens 25-mal würfeln, dann machen Sie keinen Verlust mehr. Hier meine Begründung: Bei jedem Wurf hat der

Spieler die Chance von 35/36, dass er keine Doppelsechs wirft. Bei 24 Würfen $(35/36)^{24}$ gibt es eine Chance von 0.508 (also über 50%), dass der Spieler gewinnt. Mit 25 oder mehr Würfen läge die Chance unter 50%.

Lieber Chevalier
Ich habe die Lösung deines Problems gefunden. Du musst mindestens 25x würfeln lassen. Dies aufgrund folgender Begründung: $(35/36)^n \approx 0.5$

$$n \cdot \log(35/36) = \log 0.5$$
$$n > 24.6$$

Cher de Méré
Beim ersten Spiel ist die Chance, dass der Spieler gewinnt 5/6. Im ganzen Spiel hat er
$5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 = 48\%$ Gewinnchancen. Du hingegen hast 52% Gewinnchancen.
Im zweiten Spiel hat der Spieler $(35/36)^{24} = 50.8\%$ Gewinnchancen. Während du nur 49.2% Gewinnchancen hast.
Ich rate Dir deine Spieler in Zukunft 25-mal würfeln zu lassen und schon steigt deine Gewinnchance auf 50.6%.
Viel Spass beim Geldverdienen Dein Pascal

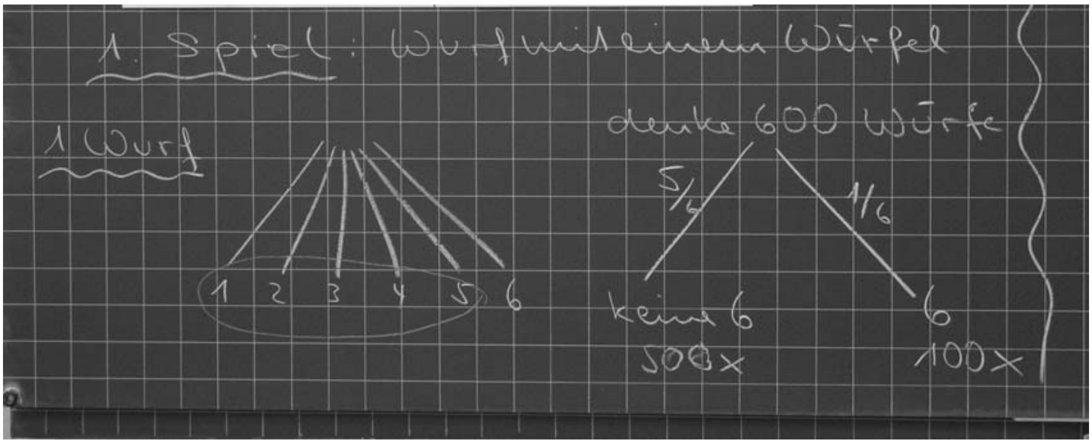
Damit endet unser Blockhalbtag. In den Briefen kommt zum Ausdruck, dass die meisten Schüler diese beiden Spiele verstanden haben und fürs Erste akzeptieren, dass beim mehrmaligen Würfeln die Wahrscheinlichkeiten multipliziert und nicht addiert werden. Allerdings sprechen wir immer noch mit einem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff. Zudem haben wir diese Multiplikation bisher nicht graphisch veranschaulicht. Dieses kräftige Mittel der Darstellung wurde in der Kombinatorik erstaunlicherweise nicht verwendet und tauchte hier bisher auch nicht spontan auf. Über die graphische Darstellung will ich am Montag das Phänomen des Multiplizierens noch weiter fundieren.

Lektionen 5/6

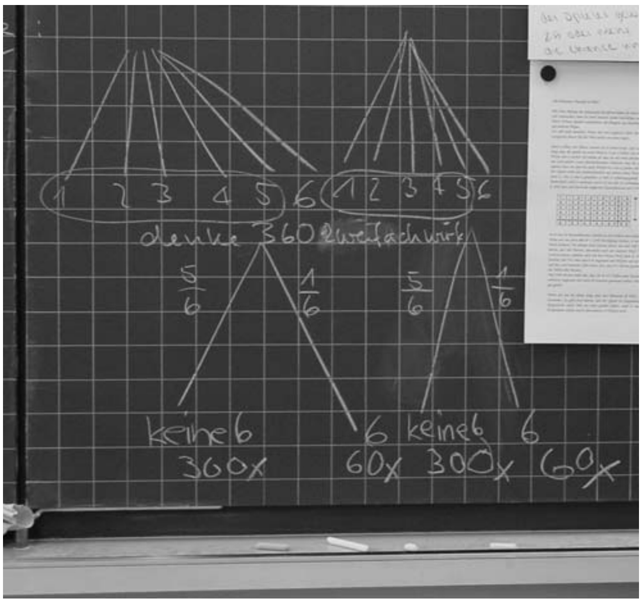
Am Montag beginnen wir wiederum im Kreis. Die Briefe von de Méré sind rund um de Méré an der Wand aufgehängt. An der Tafel fixiert sind die vier Antworten, die mir freitags am Ende des Vormittags abgegeben wurden. Die Struktur des Lehrstücks ist an der Tafel notiert. Zu Beginn erfahre ich, dass ein fünfter Brief samt der Schülerin Simone fehlt.

Ich erläutere nochmals kurz den Verlauf des Freitags: In der Ouvertüre haben wir antike Knöchelchen und Spielwürfel kennen gelernt, die für das Spiel, aber auch für die Vorhersage des Schicksals benötigt wurden. Im I. Akt stand Chevalier de Méré mit seinen Spielen im Zentrum. Wir haben sie nachgespielt und von seiner verzweifelten Lage gehört, nämlich dass er beim zweiten Spiel wider Erwarten sein Vermögen verspielte. Aus dieser Situation verfasste er einen Brief an Blaise Pascal und bat um Hilfe. Im II. Akt lernten wir Blaise Pascal kennen und wir befassten uns mit der Anfrage von de Méré. Wir merkten, dass sich die Wahrscheinlichkeiten nicht proportional verhalten, dass man sie nicht einfach addieren kann, sondern dass man sie wohl multiplizieren muss wie in der Kombinatorik. Wir haben darüber bereits anhand der Auslegordnung der 36 verschiedenen Doppelwürfe diskutiert. Alle Würfel sind wieder ausgelegt wie am Freitagmittag. Fragen scheinen keine aufgetaucht zu sein.

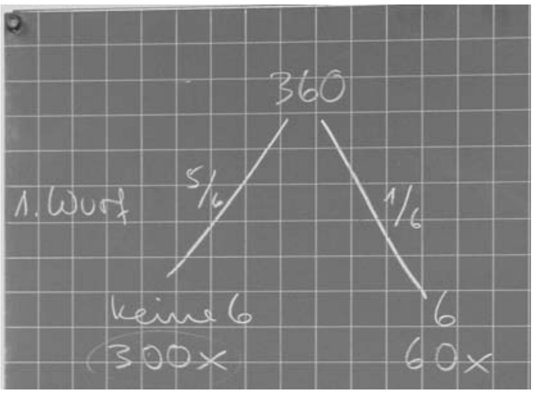
„Am Freitag haben wir mehrfach darum gerungen, warum die Wahrscheinlichkeiten bei diesen Spielen multipliziert und nicht addiert werden. Heute möchte ich diesen Sachverhalt noch graphisch verdeutlichen.“ Da bisher niemand auf eine Baumdarstellung hinwies, ergreife ich die Initiative:



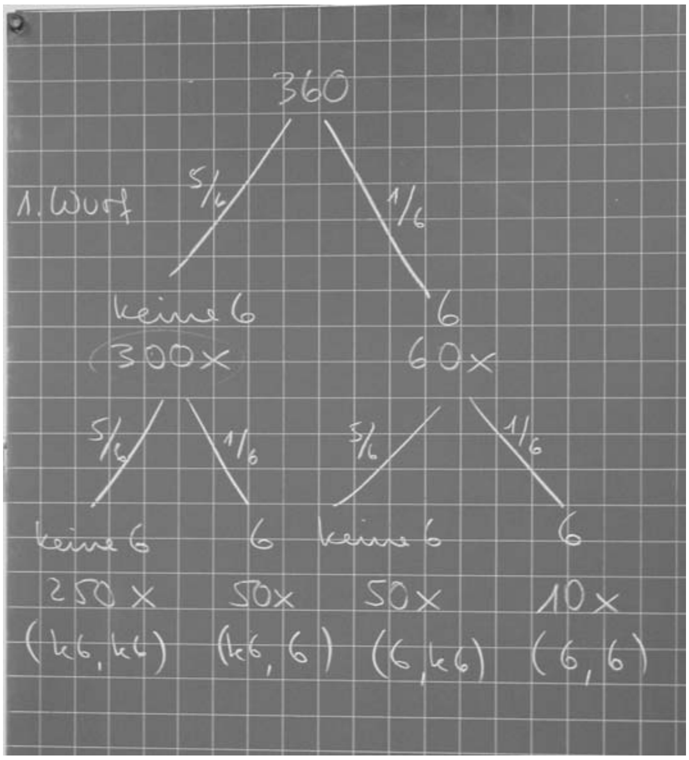
Ich zeichne die Möglichkeiten für das Resultat bei einem Wurf. Rechts fasse ich die interessierenden zwei Ausgänge ins Auge: keine 6 und 6. Zur Verdeutlichung der Anteile denken wir uns z.B. 600 einzelne Würfe. In 100 Würfen ist eine 6, in den übrigen 500 Würfen ist keine 6 zu erwarten. Dies ergibt die entsprechenden gelben Verhältniszahlen. Soweit so gut. Ein Blick in die Runde bestätigt, dass dies verstanden wird. „Wie sieht jetzt eine Darstellung für zweimaliges Würfeln aus?“ Ich setze mich an den Rand und gebe die Bühne frei. Michael kommt an die Tafel und zeichnet zweimal die linke Situation nebeneinander. Lisa: „Hier sieht es so aus, als käme es darauf an, welches welcher Würfel ist." Reto antwortet: „Man könnte die Zahlen 1 bis 5 zusammenfassen.“ So wird dann neu gezeichnet, aber immer noch nebeneinander. In der Hoffnung auf eine andere Darstellung frage ich: „Können wir bei dieser Darstellung sehen, in wie vielen Fällen keine 6 vorkommt?“ Reto: „Bis jetzt sehen wir nur, wann eine 6 bei einem Würfel kommt.“ Beide Würfe werden getrennt voneinander betrachtet.



Ich: „Denken wir uns doch 360 Zweifachspiele.“ Anna: „Insgesamt zeigen 2 mal 1/6 eine 6." Ich traue meinen Ohren kaum: Da werden also weiterhin munter Wahrscheinlichkeiten addiert. Stefan: „Man würfelt mit dem 1. Würfel 360-mal, dann hat man 300-mal keine 6 und 60-mal eine 6.“ Auch Reto bringt es nicht zusammen: „Beim 1. Würfel kommt 60-mal eine 6, bei zweiten auch, also insgesamt 120-mal eine 6. Aber es könnte auch eine Doppelsechs geben.“ Eine zweistufige Darstellung scheint niemandem in den Sinn zu kommen. Zum Glück ist die Tafel voll. Ich wende auf eine neue Seite und wage mit der Klasse einen Neuanfang: „Wir haben eine zweistufigen Vorgang: Wir betrachten den ersten Wurf und dann den zweiten Wurf.“ Ich beginne mit der bereits gefundene Darstellung für einen Wurf.

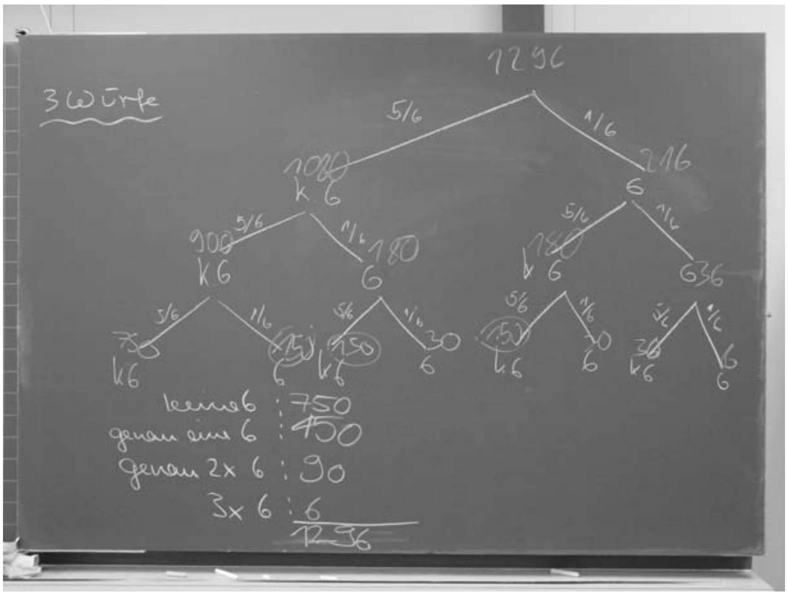


Jetzt kommt der zweite Wurf. „Und bei beiden Würfen soll keine 6 sein.“ Stefan: „Es gibt keine 6, wenn diese 5/6 bei jedem Würfel eintreten.“ Da keine weiteren Wortmeldungen erfolgen, fahre ich fort: „Sicher geht das rechts nicht, sondern nur noch in den 300 Spielen links. Nur diese Spiele kommen noch in Frage.“ Christian K: „Da sind es auch wieder 5/6 und 1/6.“ Ich nehme dies auf und zeichne zwei Linien weiter. Stefan wendet ein: „Aber der zweite Würfel wird ja 360-mal und nicht nur 300-mal geworfen! Graziella entgegnet: „Die übrigen Fälle sind auf der rechten Seite.“ So zeichne ich auch auf der rechten Seite weiter. Langsam vervollständigt sich die Darstellung. Jetzt sind wir mitten drin. „Was bedeutet die Linie ganz rechts?“ Lisa: „Doppelsechs, in 10 Fällen.“ „Und in wie vielen Spielen haben wir keine 6?“ Anna: „In 250 der Fälle; jedes Mal links.“ Eva sieht klar und möchte bereits weiter: „Jetzt muss man den Baum so hinunter machen für das ganze Spiel.“ Anna: „Ja, für jeden Wurf.“ Da diese Darstellung zentral ist, möchte ich mit der Klasse dran bleiben. „Betrachten wir den Baum noch etwas genauer: „Welchen Einfluss haben die Wahrscheinlichkeiten?“ Stefan: „360 · 5/6 · 5/6“ Ich: „Also, hier wird es sichtbar: Die Wahrscheinlichkeiten werden multipliziert und nicht addiert! In den 360 Spielen taucht bei 5/6 dieser Spiele, also bei 300 Spielen, im ersten Wurf keine 6 auf. Bei diesen 300 Spielen taucht wiederum in 5/6 der Spiele auch im zweiten Wurf keine 6 auf, also eben in 5/6 von 5/6 von 360 Spielen oder eben in 5/6 · 5/6 · 360 = 250 Spielen.“ Ich blicke in die Runde. „Hier ist jetzt der wesentliche Grund für diese Multiplikation sichtbar!“ Nach einer Denkpause erkundige ich mich nach den übrigen Spielausgängen. Gemeinsam diskutieren wir die übrigen Fälle und notieren ihre Bedeutung. (k6,k6) , (k6,6) , (6,k6) , (6,6). Die vier Fälle betrachten wir auch nochmals in unserer Auslage der roten und weissen Würfel auf dem Boden. In einer Ecke die Doppelsechs, in den anschliessenden Zeilen je das Fünffache und im restlichen Quadrat unter dem grünen Mäppchen die fünf mal fünf Doppelwürfe ohne 6. Diese Parallelität zwischen der graphischen Darstellung und den ausgelegten Würfeln finde ich besonders eindrücklich und überzeugend.



Damit ist die erste halbe Stunde um. Bereits ist gesagt worden, dass es jetzt so weiter geht. Aber die Schüler sind heute eher träge und wünschen, dass wir die Fortsetzung gemeinsam an der Tafel bearbeiten. Nur durch Aufruf und mit Widerstand kommen Samuel, dann Olivier und Thomas, bis sich unter Mithilfe der ganzen Klasse der Baum an der Tafel entfaltet.

Als günstige Anzahl Spiele werden vorerst 250, dann 720 und schliesslich von Christian S mit dem Taschenrechner in der Hand 1296 vorgeschlagen. Auf Annas Nachfrage begründet er: „Wir beginnen unten mit 6 und rechnen dann immer rückwärts durch 1/6.“ (216 Spiele hätten genügt!) Nach dem Eintragen der entsprechenden Zahlen werden die 6 der 1296 Fälle ersichtlich, in denen wir drei Sechsen werfen. Anna: „Da haben wir eine Wahrscheinlichkeit von 1/6·1/6·1/6.“

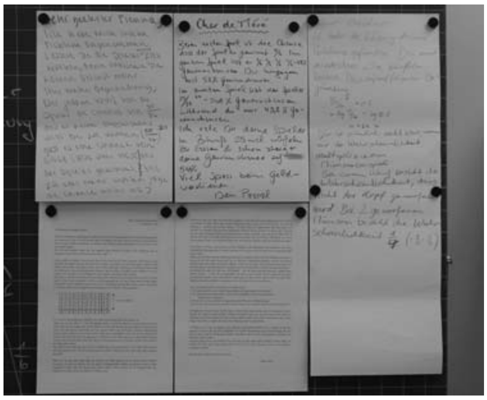


Ist dieser Baum wirklich verstanden? Ich frage: „In wie vielen Fällen haben wir genau eine 6?“ Michael und Reto sehen 450 Fälle. Anna färbt sie an der Tafel ein und notiert. Schliesslich sind es vier Varianten in einer Kolonne und die Summe ergibt zu unserer Bestätigung die Gesamtzahl 1296 der Spiele. Auf meine Frage nach der Anzahl Spiele ohne 6 antwortet Samuel: „Diejenigen ganz links: $(5/6)^3$ und wenn wir viermal werfen, so ist es $(5/6)^4$.“ Die Erkenntnis, dass wir hier längs der Pfade multiplizieren, scheint sich durchgesetzt zu haben.

Die Ausgangszahl 1296 macht es hier schwieriger, das Bild des Gebäudes mit den 216 Zimmern nochmals heranzuziehen. Zum Abschluss dieser Stunde weise ich darauf hin, dass derartige Bäume ein mächtiges Werkzeug sind zur Veranschaulichung von mehrstufigen Zufallsprozessen. Wenn es uns gelingt, einen Sachverhalt auf diese Art darzustellen, so haben wir ihn gut verstanden und das Problem ist beinahe gelöst. Anhand dieses Baumes hätte ich eigentlich bereits die Wahrscheinlichkeit im laplaceschen Sinne definieren und die Regel der Multiplikation einbringen können. Ich werde es am Freitagmorgen nachholen, wenn hoffentlich die Klasse vollzählig anwesend sein wird.

III. Akt: De Méré und die Antwortbriefe

Nach der Pause kommen wir zum III. Akt. Auf Grund aller bisherigen Gespräche um die Spiele und mit den aufgehängten Antwortbriefen, darunter ein von mir eingebrachter (siehe folgende Seite!), sollte de Méré in der Lage sein, seine Spielsituation zu verstehen und weitere Spiele zu entwickeln. Die an der Tafel montierten Schülerbriefe (siehe oben!) lasse ich vorlesen, damit deren Inhalt zur Kenntnis genommen wird.



Paris, Faubourg Saint-Michel
27. September 1654

Cher Monsieur Chevalier de Méré

Mit Ihrer Anfrage das Glücksspiel betreffend haben Sie mich besonders geehrt. Da mich diese Angelegenheit sehr interessiert, habe ich mich intensiv damit beschäftigt und mich auch mit meinem Freund, Monsieur Pierre Fermat, darüber unterhalten, der übrigens auf dieselben Schlüsse gekommen ist wie ich, auch wenn auf anderen Wegen. Ich will mich bemühen, Ihnen hier eine möglichst klare Antwort zu geben, in der Hoffnung, dass Sie wenigstens diesen Teil der Welt wieder verstehen mögen.

Zuerst sollten wir klären, warum Sie in ihrem ersten Spiel auf die Dauer gewinnen. Wir sind uns wohl einig, dass die Spieler im ersten Wurf in 5 von 6 Fällen, das heißt in 5/6 der Würfe keine 6 und in 1/6 der Würfe eine 6 werfen. Ich nehme an, dass Sie mit Ihrer jahrelangen Erfahrung im Würfelspiel daraus nicht wie viele andere Leute fälschlicherweise schliessen, dass die Spieler im Spiel mit vier Würfen in 4 von 6 Spielen, bzw. im Spiel mit sechs Würfen in 6 von 6 Spielen, also immer, eine 6 werfen.
Der Spieler wirft also durchschnittlich mit seinem ersten Wurf in 5 von 6 Fällen oder in 30 von 36 Fällen keine 6. Hat er eine 6 geworfen, so hört er erfahrungsgemäß auf und lässt Ihnen seinen Einsatz liegen. Andernfalls wirft er nochmals und in 25 von den 30 verbliebenen Partien fällt auch im zweiten Wurf keine 6. Dies lässt sich durch alle möglichen Konstellationen mit 2 Würfeln veranschaulichen:

1 , 1	1 , 2	1 , 3	1 , 4	1 , 5	1 , 6
2 , 1	2 , 2	2 , 3	2 , 4	2 , 5	2 , 6
3 , 1	3 , 2	3 , 3	3 , 4	3 , 5	3 , 6
4 , 1	4 , 2	4 , 3	4 , 4	4 , 5	4 , 6
5 , 1	5 , 2	5 , 3	5 , 4	5 , 5	5 , 6
6 , 1	6 , 2	6 , 3	6 , 4	6 , 5	6 , 6

30 von 36 Fällen

In 25 von 36 Konstellationen, nämlich in den Feldern oben links, kommt also keine 6 vor. Wenn wir uns jetzt aber 6^4 = 1296 Durchgänge denken, so wird der Spieler ein Sechstel davon im ersten Wurf verlieren. Die übrigen fünf Sechstel davon, das sind 1080 Partien, werden fortgesetzt. Fünf Sechstel davon, also 900 Partien, überstehen auch den zweiten Wurf. Und 750 Partien, nämlich wiederum fünf Sechstel davon, erfahren auch mit dem dritten Wurf keine 6. Schließlich enden 625 Partien, nämlich fünf Sechstel von 750, ohne eine 6 in insgesamt vier Würfen und der Spieler gewinnt. In allen andern Partien, und das sind immerhin 1296 minus 625, also 671 Partien gewinnen Sie. Und dies ist doch etwas mehr als die Hälfte aller Partien.
Auf 1296 Partien heißt dies, dass Sie in 671 Fällen einen Einsatz gewinnen, in 625 Fällen Ihren Einsatz verlieren; insgesamt also etwa 46 Einsätze gewinnen sollten. Und davon haben Sie ja über lange Zeit ganz gut gelebt.

Wenn wir uns bis dahin einig sind, cher Monsieur de Méré, können wir uns Ihrem zweiten Problem zuwenden. Es geht jetzt darum, dass der Spieler 24 Doppelwürfe ausführt und gewinnt, wenn er keine Doppelsechs wirft. Wie wir oben gesehen haben, wird er etwa in einem von 36 Doppelwürfen eine Doppelsechs werfen und in den anderen 35 Würfen nicht.

Wird dieses Spiel von, sagen wir N Personen, gespielt, so sind nach dem ersten Doppelwurf noch 35/36 der N Personen im Spiel. Nach dem zweiten Doppelwurf sind es noch 35/36 von N, also $(35/36)^2$ N Personen - verzeihen Sie mir diese Formel - im Spiel. Nach 24 Doppelwürfen sind demzufolge noch $(35/36)^{24}$ N Personen ohne geworfene Doppelsechs. Und das sind die Gewinner in diesem Spiel. Und wie Sie mit einigem Aufwand selbst nachrechnen können, ist dies 0.5086·N, also mehr als die Hälfte aller N Spieler! Das heißt, auf 10'000 Spiele gewinnen Sie etwa deren 4914 und verlieren 5086 Spiele. Sie müssen sehr oft gespielt haben, bis Sie gemerkt haben, dass Ihre Chancen schlechter stehen als diejenigen der Spieler!

Zwar kann ich Ihren Lebenswandel und Ihre Tätigkeit in den Spielsalons nicht gutheißen, aber meine Dankbarkeit Ihnen gegenüber für diesen Denkanstoss ist so gross, dass ich Ihnen trotzdem ein paar Ratschläge geben möchte:
Sollten Sie nach dieser bitteren Erfahrung nicht von der Spielerei ablassen und sich Höherem zuwenden, so lassen Sie doch die Spieler einmal mehr, also 25 Mal einen Doppelwurf ausführen. Wie Sie nach meinen Ausführungen leicht selbst nachrechnen können, werden Sie so wieder auf der Gewinnerseite stehen und, bei gleichzeitiger Einschränkung Ihrer Ausgaben, mit der Zeit Ihre hohen Schulden zurückzahlen können.
Entwickeln Sie zudem ein paar neue Würfelspiele - was ich Ihnen nach dem intensiven Studium dieses Briefes zutraue - so dass Sie Ihr Spielangebot von Zeit zu Zeit wechseln und der Langeweile der Spieler zuvorkommen können. Ihre schmerzhaften Erfahrungen mit dem zweiten Spiel werden Sie wohl lehren, künftige Spiele sehr gründlich zu analysieren, bevor Sie damit in den Salons auftreten.

Hier drei Spielvarianten, wie ich sie mir vorstellen könnte:
1. *Der Spieler gewinnt, wenn in fünf Doppelwürfen die Augensumme 8 nicht auftritt.*
2. *Der Spieler gewinnt (oder verliert), wenn in einer festgelegten Anzahl Dreierwürfe die Augensumme 7 vorkommt.*
3. *Ebenso lässt sich ein Spiel für die Augensumme beim Wurf mit 4 Würfeln denken.*

Es lassen sich noch viele weitere attraktive Spiele erdenken! Der Phantasie sind da keine Grenzen gesetzt!

Ich hoffe sehr, dass Sie meinen Ausführungen in allen Details folgen können, dass Sie mindestens in diesem Bereich den Nutzen mathematischen Denkens anerkennen und dass Sie jetzt etwas besser unsere so vielfältige und überraschungsreiche Welt verstehen können. Sollten trotz allem Unsicherheiten oder weitere Fragen auftauchen, so zögern Sie nicht, mich frühzeitig wieder zu konsultieren.

Im Übrigen hat es mich sehr gefreut, dieses überaus fundamentale Problem lösen zu dürfen. Ich wurde angeregt, intensiver über die Gesetzmäßigkeiten des Zufalls nachzudenken und bin überzeugt, dass sich hier ein neues Feld der Mathematik eröffnet. Demnächst will ich meine diesbezüglichen Gedanken und Resultate niederschrieben.
Nebenbei gesagt wissen Sie vielleicht, dass ich schon ein paar andere kleine Schriften verfasst habe, von welchen ich Ihnen gerne einige beilege für den Fall, dass Sie nicht das ganze Leben nur am Spieltisch verbringen möchten.

Mit den besten Wünschen für Ihre Zukunft

Blaise Pascal

„Sie erhalten jetzt als de Méré die Antwortbriefe, studieren diese und notieren sich vorerst die wichtigen Erkenntnisse über diese Spiele. Versuchen Sie, möglichst alles zu klären. Allenfalls besteht die Möglichkeit, sich mit einer konkreten Frage schriftlich nochmals an Pascal zu wenden.“ Dazu verteile ich eine kurze Beschreibung der Spiele und meinen längeren Brief von Pascal an de Méré, in dem es gegen Schluss neue Spielvorschläge hat. So hat jeder Schüler in dieser zweiten Lektion die Gelegenheit, sich die wichtigsten Zusammenhänge zu notieren, sich in einer kleinen Dreiergruppe Klarheit zu verschaffen und anhand von weiteren Problemen das Gelernte anzuwenden.

Viel wird nicht aufgeschrieben, aber alle notieren sich von der Tafel die Bäume. Im zweiten Teil der Lektion widmen sich die meisten den Spielen. Christian S meint, es gebe ja sehr viele Möglichkeiten, mit 3 Würfeln eine Augensumme 7 zu erhalten. Ich ermutige ihn: „Das ist durchaus zu bewältigen.“ Lisa fragt mich, was die Augensumme sei. Schliesslich notiert sie untereinander alle 15 Möglichkeiten, wie die Augensumme 7 zustande kommen kann. Alain ist sich im Unklaren, ob 4-2-1 und 4-1-2 gesondert zu zählen sind. Ich verweise ihn auf den Baum und auf die ausgelegten Würfel am Boden. Michael meint dazu: „Ja, es kommt auf die Reihenfolge an.“ In dieser Gruppe wird mit Permutationen aus der Kombinatorik gearbeitet und sehr schnell die Anzahl der Möglichkeiten bestimmt:

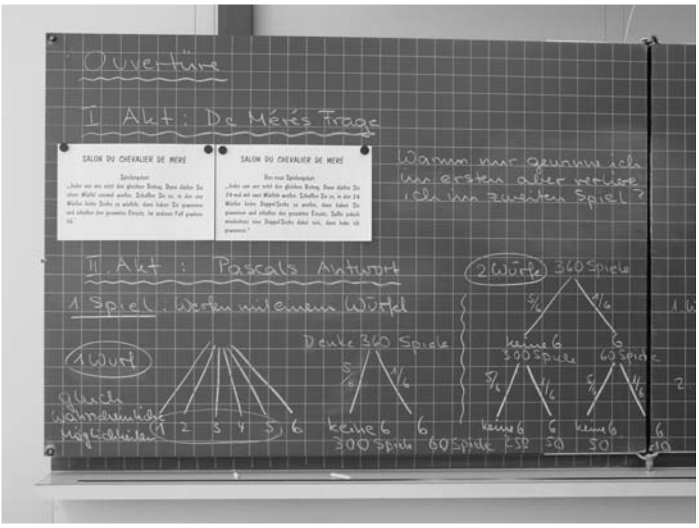
5 1 1	3-mal	nämlich	5 1 1	1 5 1	1 1 5			
4 1 2	6-mal	nämlich	4 1 2	4 2 1	2 4 1	2 1 4	1 4 2	1 2 4
3 3 1	3-mal	nämlich	3 3 1	3 1 3	1 3 3			
3 2 2	3-mal	nämlich	3 2 2	2 3 2	2 2 3			

Anfragen an Pascal tauchen in dieser zweiten Stunde keine auf.
Als Hausaufgabe formuliere ich den folgenden Auftrag:
1. Klären Sie Spielvorschlag 2.
2. Formulieren und analysieren Sie ein weiteres, eigenes Spiel (auf separatem A4-Blatt!).

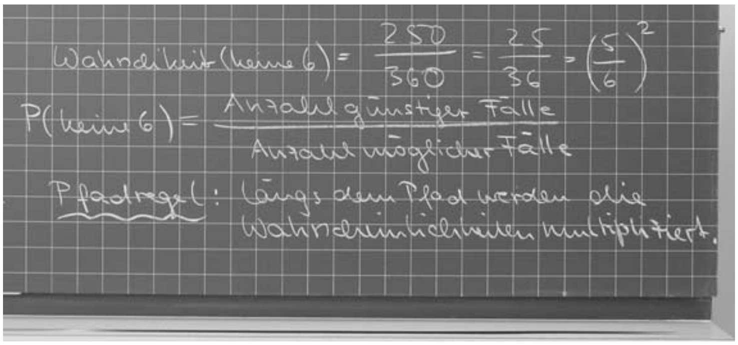
Lektion 7

Am Freitag sitzen wir wiederum im Kreis. An der Wand hängen jetzt auch die Antwortbriefe von Pascal an de Méré. Die Sammlung im Zentrum hat eine Erweiterung erfahren um einen grossen Astragalus, mehrere heutige Spielwürfel und ein räumliches Würfelmodell, das unser im Zusammenhang mit dem dreifachen Würfeln erwähntes Gebäude darstellen soll. Annina ist erstmals dabei und Simone hat sich wieder eingefunden. Dafür fehlen Thomas, Kathrin und Eva, welche einen freien Halbtag einziehen. Ob dies wohl mit dem Lehrstück zu tun hat? Christian K fällt zu Beginn auf, dass am Boden ein neuer Knochen liegt. Er vermutet, es könnte ein Rinderknochen sein. Es ist ein Astragalus eines nepalesischen Wasserbüffels, könnte aber genau so gut von einem Rind stammen. Weiter fallen einige besondere Würfel auf: Es hat Siebnerwürfel, einen Kugelwürfel und neuseeländische „Astragali“.

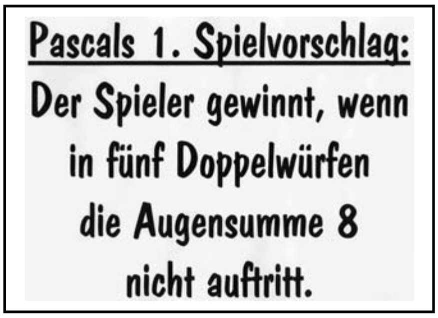
Ich: „Heute werden wir uns nach einer kurzen Repetition samt einigen neuen Begriffen im III. Akt mit den neuen Spielen für de Méré befassen und, wenn es die Zeit erlaubt, zu einem Abschluss des Lehrstücks gelangen.“ An der Tafel habe ich zur Repetition die bereits behandelten Bäume zum 1. Spiel von de Méré mit einem und zwei Würfeln vorbereitet. Dies soll als Einstieg, als Information für die zwei am vergangenen Freitag abwesenden Schülerinnen



und als Überblick für das kommende Feedback dienen. Beim Durchgang durch die Beispiele erläutere ich die wichtigsten Begriffe: gleich wahrscheinliche Ausfälle, Ereignis, Wahrscheinlichkeitsbaum. Für die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln keine 6 zu werfen, vermeldet Michael sofort: „25/36, nämlich 5/6 mal 5/6.“ Graziella liefert die Begründung: „Von 360 Spielen sind 250 günstig, also 250/360.“ Dies ist der Moment, um die Wahrscheinlichkeit bei gleich wahrscheinlichen Ausfällen zu definieren als Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zur Anzahl der möglichen Fälle. Meist schreiben wir für die Wahrscheinlichkeit P wegen probability (e), probabilité (f), probabilità (i), probabilidad (sp), … und dies alles aus dem Latein: probabilitas.



Damit sind wir auch bereit, die beiden Spiele des de Méré mit einem Baum zu illustrieren. Wir einigen uns darauf, dass nur ein einziger Pfad nötig ist, und dieser liefert sofort die Wahrscheinlichkeit von $p = (5/6)^4 = 0.4823$ als Gewinnchance des Spielers und $q = 0.5177 > 0.5$ als Gewinnchance von de Méré. Ebenso erklärt sich das zweite Spiel von de Méré. Wiederum reicht ein Pfad mit 24 Doppelwürfen. Der Spieler gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit von $(35/36)^{24} = 0.5086 > 0.5$. Dies ist nur wenig mehr als 0.5. Somit muss de Méré sehr oft gespielt haben, um überhaupt klar feststellen zu können, dass er auf die Dauer verliert.



In den knapp 20 Minuten haben wir die zentralen Aspekte nochmals vertieft und die wichtigsten Begriffe geprägt. Da keine Fragen bestehen, gehe ich davon aus, dass wir für die beiden Spielvorschläge von Pascal gerüstet sind. Auf einer neuen Tafel hänge ich den ersten Spielvorschlag Pascals auf. Linda beginnt mit der Erklärung: „Es gibt 5 Möglichkeiten für die Augensumme 8, also ist die Wahrscheinlichkeit in einem Doppelwurf 31/36, dass keine Augensumme 8 fällt.“ Auf meine Nachfrage zeigt sie in unseren ausgelegten Würfeln, wie die fünf Möglichkeiten in einer schrägen Linie liegen. Dann fährt sie fort und erläutert, dass sich somit in den 5 Würfen die Wahrscheinlichkeit, keine Augensumme 8 zu erhalten, durch Multiplikation ergibt:

$\rightarrow$ p(keine Augensumme 8) = $(31/36)^5 = 0.4735$.

Samuel ergänzt, dass dann de Méré mit einer Wahrscheinlichkeit

$q = 1 – 0.4735 = 0.5265 > 0.5$ gewinnt.

Pascals 2. Spielvorschlag:
Der Spieler gewinnt (oder verliert) wenn in einer festgelegten Anzahl Dreierwürfe die Augensumme 7 vorkommt.

Zum zweiten Spiel meldet sich Christian S: „Zuerst müssen wir alle Möglichkeiten aufschreiben, in denen keine 7 vorkommt. Es sind 15 Würfe.“ Er beginnt zu diktieren:
1 1 5, 1 2 4, 1 3 3, … Ich zögere, da er wirklich alle 15 Fälle einzeln diktieren will. Alain interveniert: „Wenn alle Ziffern verschieden sind, gibt es 6 Vertauschungen, so genannte Permutationen, bei zwei verschiedenen Ziffern sind es 3 mögliche Vertauschungen, und dies kommt dreimal vor: 1 1 5, 1 3 3, 2 2 3.“ Nachdem dies geklärt ist, fährt Christian S fort: „Insgesamt gibt es 216 Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, im ersten Wurf keine 7 zu werfen, ist 15/216; da habe ich eine Ungleichung aufgestellt: $\frac{15}{216} \cdot x < 0.5$.“
Anna protestiert als Erste: „Das muss aber ‚hoch x’ heissen.“ Reto pflichtet bei und Linda begründet: „Die Wahrscheinlichkeiten müssen multipliziert werden.“ Unzufrieden blicke ich immer noch in die Runde. Christian K merkt den zweiten Fehler: „Dies ist doch die Wahrscheinlichkeit, bei *jedem* Spiel Augensumme 7 zu erhalten.“ Schliesslich lautet die Gleichung: $(\frac{201}{216})^x = 0.5$. Jetzt sehe ich Zustimmung.

Logarithmieren liefert $\lg(\frac{201}{216})^x = x \cdot \lg(\frac{201}{216}) = \lg(0.5) \quad \rightarrow \quad x = \frac{\lg(0.5)}{\lg(\frac{201}{216})} = 9.63$

Anna interpretiert: „Die Grenze zwischen Gewinn und Verlust liegt bei 9.6 Würfen.“ „Was bedeutet dies, wenn der Spieler ohne Augensumme 7 gewinnt?“ Die Taschenrechner liefern die genaue Zahl: $(201/216)^{10} = 0.4869$. Wenn de Méré also 10-mal werfen lässt, so gewinnt der Spieler mit $p = 0.4869$ und de Méré mit 0.5131.

Damit ist auch der zweite Spielvorschlag von Blaise Pascal besprochen. Zu meiner Versicherung erkundige ich mich nach allfälligen Nachfragen an Blaise Pascal. Diese bleiben aus. Viel Zeit haben wir benötigt, aber wenn ich daran denke, dass viele der Schüler und Schülerinnen unsicher waren, sich nach der Klärung konzentriert Notizen gemacht haben und schliesslich die Nachfragen ausbleiben, so bin ich überzeugt, dass sich der Aufwand gelohnt hat. Die erste Lektion geht zu Ende und ich erkundige mich noch nach den neu entwickelten Spielen. Leider hat nur Christian K ein Spiel entwickelt.

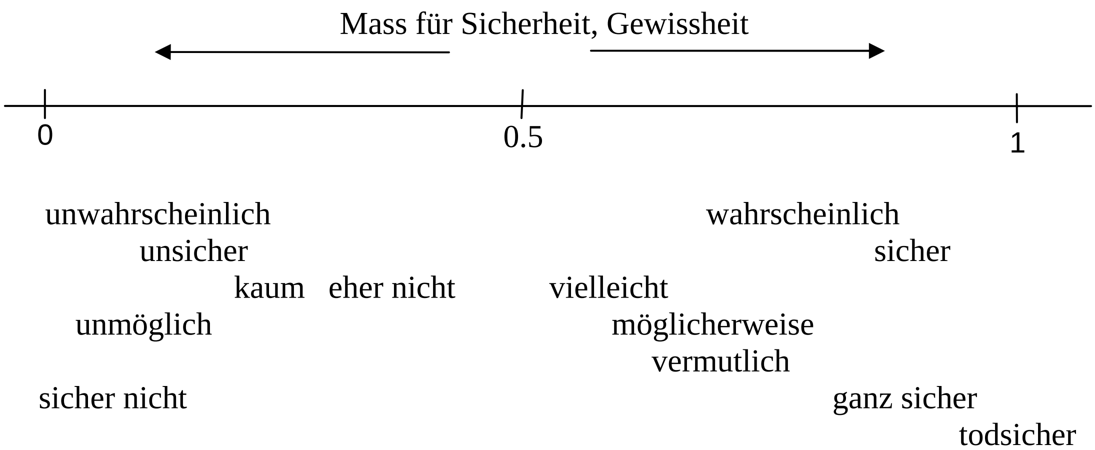
Lektion 8

Geplant hatte ich, die neuen Spiele in Kleingruppen austauschen zu lassen und anschliessend die besten Spiele im Plenum zu begutachten. Da nur ein neues Spiel vorhanden ist, verkürze ich diese Phase. Zu Beginn der zweiten Lektion rege ich an zu überlegen, welche Kriterien erfüllt sein müssen, damit wir ein ideales Spiel für de Méré erhalten. Reto: „Das Spiel sollte abwechslungsreich und nicht zu lang sein. Das gibt mehr Spiele pro Zeit.“ „Der Spieler sollte das Spiel nicht leicht durchschauen können; er soll glauben, dass er gewinnen kann.“ Christian K meint, sein Spiel erfülle diese Kriterien nicht. An der Tafel präsentiert er sein Spiel: „Der Spieler gewinnt, wenn in 12 Doppelwürfen 6 ; 1 oder 1 ; 6 vorkommt. Die Chance, dass 1 ; 6 oder 6 ; 1 vorkommt, entspricht 2/36, das heisst mit einer Wahrscheinlichkeit von 34/36 kommt in einem Doppelwurf keines dieser Paare vor. De Méré gewinnt, wenn keines der Paare vorkommt, es muss also gelten: $(34/36)^n > 0.5$. Durch Logarithmieren und

Auflösen erhält man n < 12.1. Wenn de Méré also 12-mal werfen lässt, so ist er auf der Gewinnerseite, denn $(34/36)^{12} = 0.5036$.“
Das Spiel ist gut vorgestellt worden und die Schülerinnen und Schüler konnten folgen. Aber warum erfüllt dieses Spiel die genannten Kriterien nicht, möchte ich wissen. Christian meint, es sei nichts Neues, man hätte Dreierwürfe nehmen sollen. Reto sieht einen wesentlichen Unterschied: „Es ist doch etwas Neues: Jetzt *muss* der Spieler einen bestimmten Ausgang erhalten. Früher durfte er etwas *nicht* erhalten.“ Mit den Vorschlägen von Pascal liegen jetzt insgesamt drei neue Spielvorschläge bereit. Diese gegeneinander abzuwägen finde ich unnötig. (Der Vorteil im präsentierten Spiel ist so gering, dass de Méré damit seine Finanzen kaum in Ordnung bringen wird.) Für de Méré sollte dies genügen, falls er sich wieder in die Salons wagen will.

Finale mit Rückblick und Ausblick

Damit kommen wir zum Abschluss des Lehrstücks: „Wir haben mit den Knöchelchen und den antiken Würfeln begonnen. Aber nicht nur beim Spiel, sondern auch im Alltag haben wir ein Gefühl, eine Vorstellung, was zu erwarten ist oder nicht. Und so kennen wir in unserer Sprache die verschiedensten Wörter, um auszudrücken, wie sicher, wie gewiss etwas ist.“ Wir sammeln entsprechende Wörter und versuchen sie auf einer Skala einzutragen:
Christian S: „Etwas ist wahrscheinlich – unwahrscheinlich.“
Graziella: „Die Chance ist vorhanden – nicht vorhanden.“
Lisa: „Etwas ist möglich, unmöglich“
Stefan: „Etwas ist sicher, ja sogar todsicher.“ …



„Wir kennen also eine ganze Palette von Begriffen, die ein Mass von Sicherheit, von Gewissheit ausdrücken. In der Mitte besteht am meisten Unsicherheit, nach links und rechts nimmt die Gewissheit zu. Mit diesem intuitiven Mass an Gewissheit, das vom Zufall geprägt ist, haben wir uns anhand der Spiele intensiver auseinandergesetzt. Und so entstand eine neue mathematische Disziplin über die Ungewissheit, über das Zufällige: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir haben dabei erlebt, dass der intuitive Umgang mit diesen Wahrscheinlichkeiten nicht der richtige ist, dass wir bei dreimaligem Werfen eines Würfels nicht dreimal so grosse Chance haben, eine 6 zu werfen wie mit einem Würfel. Unser proportionaler Ansatz versagt in diesem Zusammenhang!

Die Briefe von Pascal, die er an seinen Freund Fermat in Toulouse geschrieben hat, sind leider nicht erhalten, aber ein ungarischer Mathematiker, Alfréd Rényi, hat unter dem Titel „Briefe über die Wahrscheinlichkeit“ fiktive Briefe mit eingeflochtenen Zitaten aus den

„Pensées“ verfasst, wie sie Pascal an Fermat hätte schreiben können. Aus einem dieser Briefe will ich ein paar Abschnitte vorlesen.“ (A. Rényi 1969, S. 18ff)

„Ich nehme an, Sie kennen meinen Brief an die Pariser Akademie, den ich vor einigen Wochen schrieb; es würde mich nicht wundern, wenn Sie den folgenden Satz, mit dem ich den Inhalt einer geplanten, aber noch nicht geschriebenen Arbeit umreissen wollte, etwas hochtrabend gefunden hätten: ‚Somit kann diese Lehre, die die Exaktheit der mathematischen Beweisführung mit der Unsicherheit des Zufalls verknüpft und diese anscheinend vollständig einander widersprechenden Elemente miteinander versöhnt, mit Recht Anspruch auf die folgende, die Namen ihrer beiden gegensätzlichen Bestandteile ausborgende, wohl verblüffende Benennung erheben: die Mathematik des Zufalls.’

Der Mensch ist meiner Meinung nach zum Denken geboren. Seine Denkfähigkeit unterscheidet ihn von den Tieren, darin besteht seine Menschenwürde. Wir sind von einer zweifachen Unendlichkeit umgeben: einerseits von der unendlichen Weite des Weltalls, in der nicht nur wir, sondern die Erde oder sogar das ganze Sonnensystem gleichsam nur ein kleiner Tropfen im Meere sind, andererseits von der unendlichen Tiefe der Welt, wo jedes winzige Wassertröpfchen selbst ein kleines Universum in sich bildet. Wir befinden uns in der Mitte zwischen dem unendlich Grossen und dem unendlich Kleinen, wir sind Staubkörnchen im Vergleich mit den Sternen, aber Riesen im Vergleich mit den winzigen Lebewesen, die in jedem Wassertropfen wimmeln. Es ist einerlei, ob wir unseren Blick zu den Sternen erheben oder in unsere eigene Seele werfen, ob wir die Zukunft oder die Vergangenheit zu erforschen wünschen, wir finden nirgends einen sicheren Stützpunkt. Wenn wir irgend etwas, das wir zu kennen glauben, genauer betrachten – es auf die Nadel unserer Aufmerksamkeit spiessen und unter das Mikroskop unserer Logik legen –, stellt sich sogleich heraus, dass wir in gar nichts sicher sein können. Ich halte es für einen recht schwachen Trost, dass mein vergebliches Ringen mit all diesen Fragen beweist, dass ich selbst ‚bin’. Mich interessiert nämlich nicht die Frage, ob ich überhaupt bin oder nicht, sondern die Frage, wer ich eigentlich bin. Auf diese Frage finde ich aber keine Antwort, und ich kann die quälende Ungewissheit mitunter kaum ertragen. Wir wissen nicht, woher wir kommen, warum wir geboren sind und wohin wir gehen.

Die bedrückende Ungewissheit, von der ich vorhin gesprochen habe, hat ihre Wurzeln zum Teil in dem Aberglauben der meisten Menschen, die, falls sie über etwas nicht volle Gewissheit haben (und wirklich volle Gewissheit haben wir fast niemals), dann glauben, sie wüssten eben überhaupt nichts darüber. Der Ausgangspunkt meiner Gedanken ist die Behauptung, dass dies ein Irrtum ist. Teilweises Wissen ist auch Wissen, und unvollständige Gewissheit hat ebenfalls einen gewissen Wert, besonders dann, wenn man sich des Grades der Gewissheit seines Wissens bewusst ist. „Wieso“ – könnte jemand hier einwenden – „kann man den Grad des Wissens messen, durch eine Zahl ausdrücken?“ – „Jawohl“ – würde ich antworten -, „man kann es, die Leute, die ein Glücksspiel spielen, tun doch genau das.“ Wenn ein Spieler einen Würfel wirft, kann er nicht im Voraus wissen, welche Augenzahl er werfen wird, doch etwas weiss er, dass nämlich alle sechs Zahlen die gleiche Aussicht haben. Wenn wir die volle Gewissheit zur Einheit wählen, dann kommt dem Ereignis, dass eine bestimmte der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 geworfen wird, offenbar der Gewissheitsgrad 1/6 zu.“

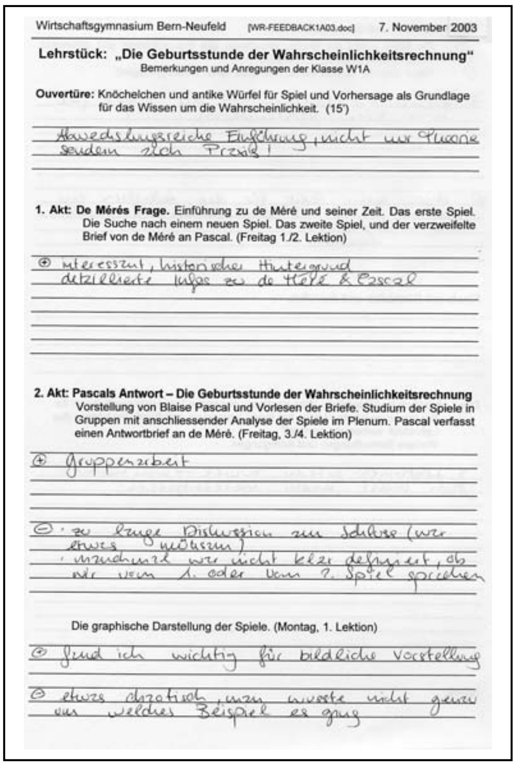
Übrigens hat der Mensch nicht nur eine Theorie über den Zufall, über das Ungewisse entwickelt, sondern auch über das Chaotische, über Gesetzmässigkeiten chaotischer Systeme.

Nach kurzer Denkpause fahre ich fort: „Was wir bisher diskutiert haben, bezieht sich auf Versuche, in denen wir gewisse Wahrscheinlichkeiten kennen wie beim regelmässigen Würfel. Wäre eine Anfrage bezüglich der unregelmässigen Astragali gekommen, so hätten wir diese etwa hundert Jahre später an Jakob Bernoulli nach Basel weiter reichen können, der sich mit diesen Fragen auseinandergesetzt hat." Ich verweise auf ein Bild, in dem diese berühmte Mathematikerfamilie dargestellt ist. Die fundamentalen Arbeiten von Blaise Pascal und Jakob Bernoulli haben ein mathematisches Gebiet begründet, das heute für die meisten Wissenschaften unverzichtbar ist.

Das Lehrstück wird jetzt zur Quelle für die Fortsetzung: Wahrscheinlichkeitsbegriff, Laplace-Versuche aus den verschiedensten Gebieten, Binomialverteilung mit Bernoulli, Testen von Hypothesen, …)

5.5 Feedback der Schüler zum Lehrstück

Damit sind wir ans Ende dieses Lehrstücks gekommen. Ich verteile ein Feedbackblatt und bitte die Schülerinnen und Schüler dieses eigenständig und sorgfältig auszufüllen, da mir die Rückmeldungen für die Optimierung dieses Lehrstücks sehr wichtig sind. Es bleiben gerade noch 15 Minuten Zeit, nach meiner Erfahrung ideal für das Ausfüllen des Fragebogens. Ich beobachte allerdings, dass die Blätter eher oberflächlich und vorwiegend stichwortartig ausgefüllt werden. Die meisten Blätter werden vor Ende der Lektion abgegeben.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [WR-FEEDBACK1A03.doc] 7. November 2003

Lehrstück: „Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W1A

Ouvertüre: Knöchelchen und antike Würfel für Spiel und Vorhersage als Grundlage für das Wissen um die Wahrscheinlichkeit. (15')

Abwechslungsreiche Einführung, nicht nur Theorie sondern auch Praxis!

1. Akt: De Mérés Frage. Einführung zu de Méré und seiner Zeit. Das erste Spiel. Die Suche nach einem neuen Spiel. Das zweite Spiel, und der verzweifelte Brief von de Méré an Pascal. (Freitag 1./2. Lektion)

⊕ interessant, historischer Hintergrund
detaillierte Infos zu de Méré & Pascal

2. Akt: Pascals Antwort – Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Vorstellung von Blaise Pascal und Vorlesen der Briefe. Studium der Spiele in Gruppen mit anschliessender Analyse der Spiele im Plenum. Pascal verfasst einen Antwortbrief an de Méré. (Freitag, 3./4. Lektion)

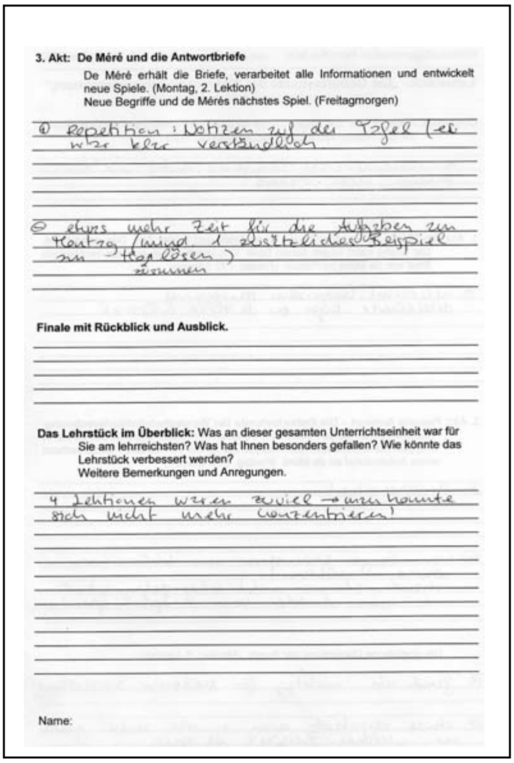
⊕ Gruppenarbeit

⊖ · zu lange Diskussion zum Schluss (war etwas verwirrend)
· manchmal war nicht klar definiert, ob wir vom 1. oder vom 2. Spiel sprechen

Die graphische Darstellung der Spiele. (Montag, 1. Lektion)

⊕ fand ich wichtig für bildliche Vorstellung

⊖ etwas chaotisch, man wusste nicht genau um welches Beispiel es ging



3. Akt: De Méré und die Antwortbriefe
De Méré erhält die Briefe, verarbeitet alle Informationen und entwickelt neue Spiele. (Montag, 2. Lektion)
Neue Begriffe und de Mérés nächstes Spiel. (Freitagmorgen)

⊕ Repetition: Notizen auf der Tafel (es war klar verständlich

⊖ etwas mehr Zeit für die Aufgaben am Montag (mind. 1 zusätzliches Beispiel zu lösen)
zusammen

Finale mit Rückblick und Ausblick.

Das Lehrstück im Überblick: Was an dieser gesamten Unterrichtseinheit war für Sie am lehrreichsten? Was hat Ihnen besonders gefallen? Wie könnte das Lehrstück verbessert werden?
Weitere Bemerkungen und Anregungen.

4 Lektionen waren zuviel → man konnte sich nicht mehr konzentrieren!

Name:

„Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung“

Ein Lehrstück in 8 Lektionen

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W1A vom 7. November 2003

	Ouvertüre: Knöchelchen und antike Würfel für Spiel und Vorhersage als Grundlage für das Wissen um die Wahrscheinlichkeit. **(15’)**	**I. Akt: De Mérés Frage** Einführung zu de Méré und seiner Zeit. Das erste Spiel. Die Suche nach einem neuen Spiel. Das zweite Spiel, und der verzweifelte Brief von de Méré an Pascal. **(Lektionen 1/2)**	**II. Akt: Pascals Antwort – Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Vorstellung von Blaise Pascal und Vorlesen der Briefe. Studium der Spiele in Gruppen mit anschliessender Analyse der Spiele im Plenum. Pascal verfasst einen Antwortbrief an de Méré. **(Lektionen 3/4)**	Die graphische Darstellung der Spiele. **(Lektion 5)**	**III. Akt: De Méré und die Antwortbriefe.** De Méré erhält die Briefe, verarbeitet alle Informationen und entwickelt neue Spiele. Neue Begriffe und de Mérés nächstes Spiel. **(Lektionen 6/7)**	**Finale mit Rückblick und Ausblick.** **(Lektion 8)**	**Das Lehrstück im Überblick:** Was an dieser gesamten Unterrichtseinheit war für Sie am lehrreichsten? Was hat Ihnen besonders gefallen? Wie könnte das Lehrstück verbessert werden? Weitere Bemerkungen und Anregungen **(Lektionen 1-8)**
AAA	**Gut als Einleitung. Nicht zu sehr ausschweifen (Herstellung der Knöchelchen…)**	**Ausformulierung von 2 Briefen ist eher mühsam (zeitraubend). Würfelversuche wären eigentlich gut zur Veranschaulichung, jedoch etwas mühsam, wenn Resultate nicht mit Theorie übereinstimmen.**	**Dieselben Probleme wie oben erwähnt.**		**Ausprobieren des neu Erlernten bei neuen Spielen ist gut, um den Inhalt besser zu verstehen.**	**Zusammenfassung gut, Bezug auf Alltag eher in der Einleitung?**	**Ich persönlich bin allgemein nicht unbedingt ein Freund von Lehrstücken. Meistens ziehen sie sich sehr in die Länge und ich habe das Gefühl des „an Ort Tretens“. Dies vor allem, wenn man versucht, eine Lösung zu finden, sie nicht (auch nach langem Überlegen) findet und dennoch weiter suchen muss.**
BBB	**Guter, interessanter, aber vor allem unerwarteter Einstieg.**	**Schön, dass wir lange selbst würfeln konnten!**	**Biographie von Pascal etwas zu umfassend, nicht sehr wichtig.**	**Gute Darstellung mit „Bäumen“.**			**Der 3. Akt; die Auswertung der Antwortbriefe von Pascal.**
CCC	**Sehr gut, weil Praxis bezogen. Z.B. die „Knochenwürfel“ aus früherer Zeit, oder Nachahmung aus Neuseeland.**	**Wieder Praxis bezogen (Geschichte de Mérés), deshalb gut. Hier wäre es aus meiner Sicht nicht unbedingt nötig gewesen, selber den Brief zu schreiben. (Dafür mehr Zeit für Antwortbrief)**	**Zu wenig Zeit für Antwortbrief. Sehr lange – zu lange wurde gefragt, warum multipliziert wird. Niemand konnte richtig logisch antworten → gibt eher ein Durcheinander → Deshalb schneller zur graphischen Darstellung übergehen.**	**Sehr gute Darstellung, macht das Ganze logisch.**	**Neue Spiele entwickeln ist spannend.**	**Wieder Praxisbezug → gut**	**Lehrstück war gut. Für meine Verhältnisse wurde zu Beginn der Lektionen zu viel wiederholt.**
DDD	**Guter Einstieg → nicht unmittelbarer Einstieg in die Mathematik, dies aber nur kurz, sonst wird der Einstieg langweilig.**	**Geschichtlicher Hintergrund nicht zu lang. Würfeln: 1. Spiel = guter Einstieg ins Ausprobieren. Das Gefühl für die Wahrscheinlichkeit wird angeregt. Hier würde ich zur Hilfe immer die eigene Sprache betrachten (Berndeutsch): D Chance isch viu chliner wenn …**	**Laufend sollten Denkanstösse gegeben werden, denn für gewöhnlich Sterbende ist das Erkennen des Problems und die Formulierung ohne Hilfe schwierig (Vorstellungskraft).**	**Sehr gut für Vorstellung**	**Die Rechnung mit der bildlichen Vorstellung und den Bäumen müssen nacheinander einzeln und danach gut kombiniert dargestellt werden.**	**Gut für das grundlegende Verständnis der Wahrscheinlichkeit.**	**Die bildliche Vorstellung (Vorstellungsvermögen) ist sehr wichtig → Kombination mit Rechnung gut überleiten.**
EEE	**War gut.**	**Es wurde etwas zu viel Zeit für das Schreiben und Besprechen der Briefe aufgewendet!**	**Bemerkung siehe 3. Akt.**	**Gut und übersichtlich. Es ist wichtig, dass wir die Darstellung selber erarbeiten mussten.**	**Antwortbriefe zu schreiben hilft einem, das Ganze noch mal zu überblicken, man kann erkennen, wie weit man das Thema schon begriffen hat.**	**Etwas zu beiläufig wurden die neuen Begriffe eingeführt. Neue Beispiele lassen einem noch einmal eine Übersicht gewinnen und allfällige Fragen klären sich so von selbst.**	**Die zusätzlichen Beispiele ganz am Schluss wären am hilfreichsten. (→ 3. Akt). Zum Teil war der Unterricht etwas langfädig.**
FFF	**Interessant, einmal etwas mehr zu erfahren.**	**Schlecht fand ich, dass man nie wusste, über welches Spiel man gerade sprach → verwirrend.**	**Das Vorlesen der Briefe fand ich nicht sehr sinnvoll, da man sie nachher nicht besprach … Man wusste wiederum nicht, über welches Spiel man gerade sprach.**	**Gut → besser vorstellbar. → Dies hätte man auch schon etwas früher einbringen können, für das bessere Verständnis.**	**Montag: Etwas schwierig, dies alles in einer Gruppe zu machen. Freitag: Repetition war hilfreich. 1. Lektion gut, verständlich.**	**Gut**	**4 Lektionen nacheinander waren etwas lang.**

GGG	Netter Einstieg. Gute Informationen.	Einführung gut. Brief schreiben sehr gut, da man Gedanken formulieren muss.		Sehr gut für Verständnis. Pfadregel hätte man vielleicht schon vorher erwähnen sollen (2. Spiel von de Méré)	Zu viel Wiederholung, Aufmerksamkeit liess nach. Entwicklung neues Spiel: Idee sehr gut, leider nur ein neues Spiel entwickelt.	Bezug zu Alltag gut. Man hätte einige praktische Beispiele geben können.	+ Man musste überlegen und nicht nur rechnen. Es wurden Sprache (Briefe) und Denken gefördert. Historische Exkurse. - Manchmal ein bisschen langatmig (zu viel Wiederholungen). Vorschlag: Man könnte ein Skript verteilen mit Beispielen, Erklärungen, Theorie, historischen Aspekten und Aufgaben.
HHH	Guter Einstieg! Kann Interesse wecken!	Das Spiel war eine gute Abwechslung und bereitete grossen Spass. Ausserdem liess sich dabei das Problemfeld erkennen an einem erfassbaren Beispiel.	Die Lösung des Problems wird gemeinsam erarbeitet und dabei musste sich jeder Schüler einen eigenen Gedankengang entwickeln (→ Anregung zum Mitdenken)	Half mir am besten, den gesamten Stoff zu verarbeiten, da es wie eine Art Zusammenfassung der zusammen erarbeiteten Theorie war.	Gut → Anwendung des Gelernten.	Man erhielt einen Gesamtüberblick über das Thema.	+ Das aufgeforderte Mitdenken. + Das Arbeiten an erfassbaren Beispielen. + Die graphische Darstellung (Baum!)
I I I	Als Einleitung gut!	Zu viele Anekdoten führen zu Langeweile. Im Grossen und Ganzen gut. Das Ganze läuft in lockerer Atmosphäre ab → gut	Gut. Jeder musste sich selber etwas überlegen. In der 4. Lektion wurde es ein wenig „langfädig“, wahrscheinlich, weil wir schon mehr als 3 Lektionen über das Gleiche sprachen → Vielleicht besser mehrere, dafür kurze Pausen!	Gut, fördert das Verständnis der Spiele.	Gut. Neues Spiel entwickeln zu kurz. Schwierigeres Spiel entwickeln wäre besser gewesen!	Half mit, den Überblick zu bekommen → gut.	Es war gut, die Spiele selber nachzustellen (zu spielen), dies förderte das Verständnis. Beispiel mit „Hochhaus“ war gut zur Veranschaulichung. Es wäre besser, das Ganze in 4 2-Lektionen-Blöcken abzuhalten.
KKK	Guter Einstieg. Interesse geweckt.	Sehr Praxis bezogen. Eigene Überlegungen mussten gemacht werden.	Studium der Spiele war sehr schwierig. Die Zeit war sehr großzügig bemessen. Wer nicht vorwärts kam, langweilte sich schnell.	Graphische Darstellung war sehr aufschlussreich.	Gut. Jeder konnte anhand der Aufgaben sehen, wie er den Stoff begriffen hat.	Abschluss war o. k.	Sehr praxisbezogen, spielerisch. Z. T. wurden die Gespräche im Plenum mühsam (immer wieder das Gleiche). Denke aber, das war dennoch lehrreich, denn die Gedankengänge werden so eingeschliffen. Verbesserungsvorschläge fallen mir spontan keine ein.
LLL	Hat das Interesse und die Aufmerksamkeit geweckt.	Es war gut, dass man die Spiele selber ausprobieren konnte. Leider wurde zu viel Zeit aufgewendet, um mögliche Erklärungen zu finden.	Das ist eine gute Idee, weil sich die Schüler dadurch mehr Gedanken über das Spiel machen. Jedoch sind nicht alle gleich schnell, was für einige etwas langweilig sein könnte.	Sehr aufschlussreich. Jedoch wurde auch hier zu viel Zeit verwendet.	Gut, weil die Schüler gleich schauen können, ob sie das Vorgehen begriffen haben oder nicht.	War ganz okay.	Da ich das Ganze schon einmal gemacht habe, war es etwas langweilig. Aber im Grossen und Ganzen war es sehr gut aufgebaut und auch verständlich.
MMM	Gut als Einstieg und Einstimmung.	Brief fand ich gut, man muss das Problem formulieren, d. h. man versteht die Fragestellung. Das Spielen sorgt für eine lockere Atmosphäre.	Zuerst selbst am Problem rumhirnen ist gut, nicht alles vorgelöst bekommen. Verfassen der Briefe nach wie vor schlau, Gründe siehe 1. Akt.	Finde ich gut, dass mit verschiedenen „Aufnahme-Kanälen“, hier „optische Erläuterung“ gearbeitet wird → etwas, das mir bleibt ...	Das Entwickeln der neuen Spiele zeigt allfällige Probleme auf → gut.	Gibt guten Überblick über Gemachtes.	+ Spielerisches „Erlernen“ + Anschauliche Bilder, dank der Würfelspiele usw.
NNN	Abwechslungsreiche Einführung, nicht nur Theorie, sondern auch Praxis.	+ Interessant, historischer Hintergrund. Detaillierte Infos zu de Méré und Pascal.	+ Gruppenarbeit - zu lange Diskussion am Schluss (war etwas mühsam) - manchmal war nicht klar definiert, ob wir vom 1. oder vom 2. Spiel sprechen.	+ fand ich wichtig für bildliche Vorstellung. - etwas chaotisch, man wusste nicht genau, um welches Beispiel es ging.	+ Repetition: Notizen auf der Tafel (es war klar verständlich) - Etwas mehr Zeit für die Aufgaben am Montag (mind. ein zusätzliches Beispiel zusammen lösen)		4 Lektionen waren zu viel → man konnte sich nicht mehr konzentrieren.
OOO	Interessanter Einstieg mit den antiken Würfeln.	+ Eigene Spielversuche in der Gruppe, Vergleich Praxis-Theorie. - Brief zu schreiben – überflüssig.	+ Interessant war die Vorstellung von Blaise, Gruppenspiele, Vergleich Praxis-Theorie, Analyse im Plenum – anhand der eigenen Erarbeitung in der Gruppe → bewusste Auffassung. - Brief zu schreiben – überflüssig.	Überflüssig.			Das Lehrstück hat mir gefallen. Lehrreich fand ich die Erarbeitung im Plenum – teils war es vielleicht etwas zu lange in die Länge gezogen (d. h. man kam zu lange nicht auf den Punkt.) Ich denke, dass der Lernstoff besser bleibt, wenn man ihn langsam und auch gemeinsam erarbeitet. Als Kritik sehe ich nur die Briefe, welche von mir aus gesehen nicht nötig waren, besser hätte ich eine Zusammenfassung im Plenum gefunden.
PPP	Interessant, erweitert Allgemeinwissen.	Gut gemacht. Immer alle Briefe vorlesen aber langweilig, da ja immer etwa das gleiche steht und alle das Problem schon begriffen haben. Musik zum Spiel war gut.	Jetzt kommt der „anspruchsvollere“ Teil. Ev. verwirrlich, wenn nicht klar gesagt wird, was die Darstellung am Boden beweisen soll.	Die graphische Darstellung an Tafel ist zu gründlich erklärt worden. Da hätte es schneller vorangehen können.	Neue Spiele, die originell sind, zu finden, ist schwer.		Jetzt erst bin ich soweit, mich der Kombinatorik zu widmen. Fragen wie in der Rudolf-Steiner-Schule.

Die Tabelle ist so aufgebaut, dass zu jedem Akt die Möglichkeit, bzw. die Aufforderung besteht, Bemerkungen und Anregungen einzubringen. Diese Akteinteilung und die Veranschaulichung des Prozesses an der Tafel sollen der Erinnerung helfen. So ergibt sich zu jedem der Akte ein beträchtliches, aber nicht eingeengtes Meinungsspektrum. Am Schluss besteht die Möglichkeit für generelles Feedback oder sonstige Meinungen, die bisher nicht untergebracht werden konnten. Dort finden wir aber auch Wiederholungen, wohl als Verstärkungen gedacht und Ansichten, die nicht direkt zum Lehrstück gehören. Da sehr viele Schülerinnen und Schüler das Blatt ohne Namen abgaben, habe ich alle Beiträge anonymisiert.

Ouvertüre: Der Einstieg wird als abwechslungsreich und interessant durchwegs geschätzt. Evtl. könnte man die sprachlichen Aspekte der Wahrscheinlichkeit im Alltag bereits hier einfliessen lassen, wie AAA anregt.

I. Akt: Als positiv bewertet wird das Spielen. DDD: „Das Gefühl für die Wahrscheinlichkeit wird angeregt." Das ungewohnte Briefe Schreiben wird ganz unterschiedlich beurteilt. Wer sich auf die Briefe einlässt, erlebt das Schreiben als hilfreich wie GGG, „da man Gedanken formulieren muss." Für das Verfassen der Briefe wurden zweimal etwa zehn Minuten eingesetzt, die Veröffentlichung durch Vorlesen dauerte weniger lang. Einige der Briefe beinhalten besondere Aspekte des Problems und diese sollten nach dem Lesen des entsprechenden Briefes kurz hervorgehoben werden. Dann wird auch der Sinn des Vorlesens klarer. Der Repetent (LLL) in der Klasse findet bereits zum I. Akt, in dem wir noch kaum um Erklärungen gerungen haben: „Leider wurde zu viel Zeit aufgewendet, um mögliche Erklärungen zu finden." Er möchte wohl fertige Lösungen und Erklärungen, was ihm aber nicht helfen wird, eigene Probleme zu lösen.

II. Akt: Die Biographie von Pascal, gekürzt gegenüber dem letzten Jahr, wird nur noch von BBB kritisiert. Natürlich ist es „etwas mühsam, wenn Resultate nicht mit Theorie übereinstimmen.", wie AAA betont, allerdings gehört dies zum Wesen des Zufalls und kann bei diesen Spielen mit dem geringen Chancenunterschied schwer ausgeschlossen werden. Am besten kann die Simulation auf einem Computer hier Abhilfe schaffen.

Heikel und ungewohnt ist sicher die längere Plenumsrunde, in der wir um das Verstehen der Spiele ringen. Die Unsicherheit, das Hin und Her der Gedanken und Meinungen sowie das entstehende „Durcheinander" sind nicht für alle erträglich. Entsprechend wurde es dann als mühsam oder „langfädig" empfunden. Der Ruf nach „Denkanstössen" (DDD) wird laut. Das Auslegen der roten und weissen Würfel, so denke ich, ist allerdings ein starker Denkanstoss. Dass nicht immer klar war, „über welches Spiel man gerade sprach" (FFF), ist verständlich. Zwar versuchte ich immer wieder auf das erste Spiel zu fokussieren, aber die Gedanken der Schülerinnen und Schüler kreisten mal da, mal dort. Dazu kommt, dass unsere zentrale Auslage der Würfelpaare beim zweiten Spiel entstand, aber auch für das erste Spiel sehr hilfreich ist.

Die graphische Darstellung mit Bäumen und Pfaden betrachte ich als Kernpunkt für das Verstehen dieser Spiele und insbesondere für die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten. Da diese Darstellungsart nicht bekannt war und auch der Repetent sie nicht einbrachte, wurde eine intensive Erarbeitung notwendig. Eine grosse Mehrheit der Schülerinnen und Schüler haben dabei sehr profitiert. Natürlich hätte ich die Baumdarstellung früher einbringen können, aber vorerst ging es ja darum, dass die Klasse aus eigenen Mitteln analysiert, ihren eigenen Verständnisweg sucht.

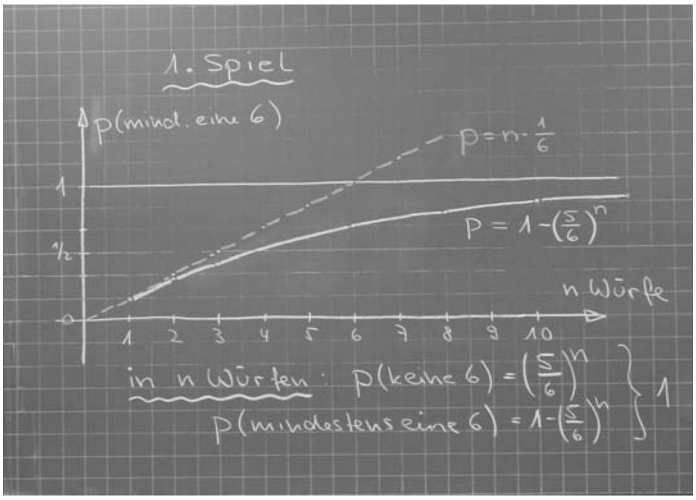
III. Akt: De Méré und die Antwortbriefe. Das Studieren und neu Entwickeln von weiteren Spielen wird positiv bewertet. Aber warum wurden nicht mehr eigene Spiele entwickelt? War es zu schwer? Darauf möchte ich im Feedbackgespräch eine Antwort erhalten. Am Freitagmorgen hielten wir in der ersten Lektion die Spiele von de Méré und von Pascal samt einem Minimum von Theorie fest: Was für den einen eine nützliche Repetition und Konzentration war, empfand die andere als überflüssig.

Das Lehrstück im Überblick: Das Lehrstück wird zurückhaltend positiv beurteilt. Man wird aufgefordert, mitzudenken, Sprache und Denken werden gefördert. Das Arbeiten an fassbaren Beispielen erlaubt spielerisches Erlernen (MMM). Graphische Darstellung (Baum, Hochhaus) und anschauliche Bilder werden lobend erwähnt. LLL, der das Lehrstück schon letztes Jahr erlebte, findet:„im Grossen und Ganzen war es sehr gut aufgebaut und auch verständlich." Der lange Suchprozess war für viele ungewohnt lang, wurde als zu lang und z. T. als mühsam empfunden. KKK weiter: „Denke aber, das war dennoch lehrreich, denn die Gedankengänge werden so eingeschliffen."
Von FFF, III und NNN werden die 4 Lektionen als zu lang erlebt, insbesondere da in der vierten Lektion ein konzentrierter Suchprozess angesagt war. Der konstruktive Vorschlag von vier Doppelstunden ist ohne weiteres durchführbar. GGG äussert den Wunsch nach Skript mit Beispielen, Theorie, Erklärungen, historischen Aspekten, Aufgaben. Davon wird in der Fortsetzung des Themas sicher noch einiges folgen.

Betrachten wir noch zwei Schülerinnen oder Schüler
CCC findet Gefallen am auf die Praxis bezogenen Einstieg mit dem Bezug zur Geschichte. Auch die geschichtliche Einordnung von de Méré findet er gut. Der Brief an Pascal sei überflüssig. Besser hätte man sich länger auf den Antwortbrief konzentriert. Beim Ringen um die Multiplikation hätte CCC in der vierten und letzten Stunde mehr Hilfe gewünscht durch die graphische Darstellung. Diese wird als logisch und das Ganze klärend empfunden. Neue Spiele entwickeln sei spannend. (Hat wohl CCC ein eigenes Spiel entwickelt?) Und nochmals wird der Praxisbezug lobend erwähnt. Insgesamt findet CCC das Lehrstück gut. Es entsteht der Eindruck, dass er gut mitmachte. Die Repetitionen zu Beginn der Lektionen hätten kürzer sein dürfen, was den Eindruck unterstützt, dass CCC insgesamt ohne grosse Probleme folgen konnte.

AAA ist Lehrstücken gegenüber eher kritisch eingestellt. Die Einleitung sei gut, aber zu sehr ausschweifend bei den Knöchelchen. Dafür hätte an dieser Stelle bereits die Alltagssprache einbezogen werden können. Das Ausformulieren wird nicht als hilfreich, sondern nur als zeitraubend erlebt. Der praktische Teil mit dem Würfeln wird zur Veranschaulichung (nicht unbedingt als Erfahrung) begrüsst, wenn da nicht die der Theorie widersprechenden Resultate wären. Die Erprobung des Gelernten an neuen Spielen und die Zusammenfassung gegen den Schluss finden Anklang. Die Hauptkritik betrifft offenbar schon früher erlebte längere Phasen des Ringens um eine Erkenntnis, in denen das Gefühl des „an Ort Tretens" aufkommen kann. Diese werden offenbar als mühsam und wenig lehrreich betrachtet.

Am folgenden Montag erhalte ich von meinem Kollegen kurz Zeit, um der Klasse ein paar Rückmeldungen aus dem Feedback zu geben. Vorerst bedanke ich mich für die nützlichen Mitteilungen. „Grundsätzlich ist es so, dass wir natürlich nicht mit *einer* Unterrichtsmethode, mit *einem* Vorgehen, immer alle Schülerinnen und Schüler begeistern können. Damit muss jede Lehrkraft leben können. Wichtig für mich ist deshalb auch, dass wir variieren, verschiedene Methoden zum Zuge kommen lassen, und eine davon ist die Lehrkunst." Ich zeige vorne meine auf Format A3 vergrösserte Feedbacktabelle. Sie ist gut erkennbar, aber auf Distanz nicht lesbar. Dann erläutere ich ihre Vorzüge: „In der Vertikalen finden wir alle Meinungen zu den einzelnen Unterrichtsabschnitten, horizontal die Ansichten einer Person durch das ganze Lehrstück hindurch. Die Ouvertüre (ich zeige auf die erste Kolonne) hat durchwegs Gefallen gefunden. Auf eine der Anregungen überlege ich mir allerdings, ob ich die Begriffe aus der Alltagssprache, die wir am Schluss zusammengestellt haben, bereits hier hervorheben werde, obwohl uns am Anfang die Skala von 0 bis 1 fehlt. Das Spielen im ersten Akt werde ich beibehalten. Natürlich ist es „mühsam, wenn Resultate nicht mit (der) Theorie übereinstimmen“, aber vermeiden lässt sich dies nicht. Das Briefe Schreiben wird sehr unterschiedlich beurteilt, von überflüssig bis gut. Nach wie vor bin ich überzeugt, dass das Formulieren hilfreich ist, um das Problem wirklich zu verstehen oder zu erklären. Die Briefe müssen im Prozess des Geschehens bleiben und sichtbar aufgehängt werden. Allerdings, statt sie vorzulesen, könnten sie auch schriftlich an die Gruppen abgegeben werden. Der intensive Suchprozess in der vierten Lektion mit den Verunsicherungen, ja zuweilen Ratlosigkeiten, bereitete einigen von euch Mühe. Es erfordert viel Konzentration, welche gegen Ende des Morgens nicht mehr bei allen vorhanden ist. Wie vorgeschlagen wurde, werde ich das nächste Mal ausprobieren, was sich ändert, wenn wir in stärker getrennten Zwei-Lektionen-Blöcken arbeiten. Im III. Akt wurde das Entwickeln von neuen Spielen sehr positiv beurteilt. Da habe ich mich gefragt, warum nicht mehr eigene Spiele entwickelt wurden. Für mich ist dies ein Widerspruch. Können Sie mir dies erklären?“ Ich schaue in die Runde, warte eine Weile. Keine Antwort. „Was soll ich daraus für Schlüsse ziehen? War es zu schwierig, wie jemand schreibt?“ Wiederum keine Antwort. Da ich die Schüler nicht so gut kenne, lasse ich es dabei. Meine Ausführungen scheinen momentan ohnehin nicht sonderlich zu interessieren. „Und wie haben Sie diesen Text von Rényi aufgenommen; war das eine gute Ergänzung?“ Manuel meldet sich spontan und meint: „Dies war interessant und führte uns zurück zu Pascal und an den Anfang.“ Einige pflichten ihm bei.



„Beim Durchdenken ist mir zuhause eine Darstellung eingefallen, die ich in Zukunft unbedingt einflechten möchte.“ An der Tafel habe ich bereits das Koordinatensystem vorbereitet. „Wir haben festgestellt, dass beim wiederholten Werfen eines Würfels das proportionale Denken versagt. Beim mehrmaligen Werfen müssen wir bereits die Fragestellung präzisieren: Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, z. B. in vier Würfen mindestens eine 6 zu werfen und die ist eben nicht $4 \cdot 1/6$.“ In der Graphik zeichne ich grün punktiert die lineare Funktion ein, die uns sehr rasch über die 1 hinausführt. „Wie sieht der Graph aus für die Wahrscheinlichkeit, in n Würfen mindestens eine 6 zu werfen? Christian K zeichnet den Verlauf mit der rechten Hand in die Luft. Ich übernehme dies in die Tafeldarstellung. Von Reto kommt nach einigem Nachdenken und referieren mit seinen Nachbarn Manuel und Christian S die Lösung: $1 - (5/6)^n$. Anna versteht das nicht und fragt bei Reto nach. Über die Wahrscheinlichkeit von $(5/6)^n$, keine 6 zu werfen, und die Tatsache, dass beide Wahrscheinlichkeiten zusammen 1 ergeben müssen, da immer eines der beiden Ereignisse (keine 6 zu werfen oder mindestens eine 6 zu werfen) eintritt, klärt sich die Funktion. Dies ist die Exponentialfunktion $(5/6)^n$ gespiegelt an der x-Achse und um eins nach oben verschoben. Die Darstellung findet Zustimmung und wird notiert. Ergänzende Fragen oder Bemerkungen sind auf Schülerseite keine vorhanden.

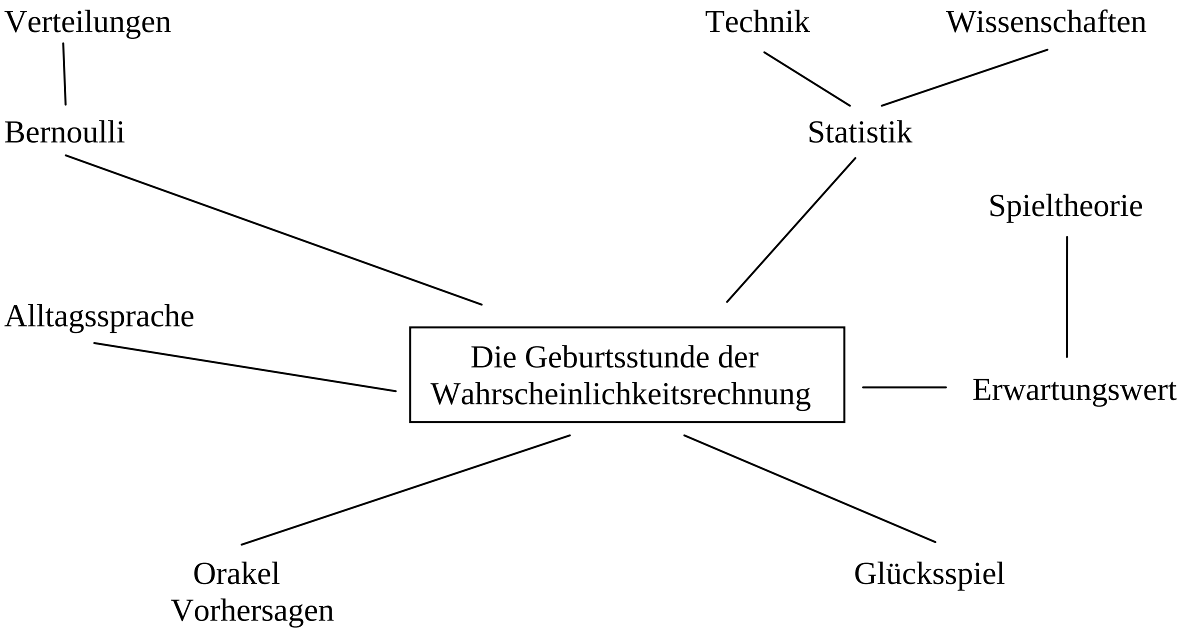
Ich hoffe sehr, dass wahrgenommen wird, wie ich einige der Rückmeldungen überdacht habe und diese allenfalls in der Optimierung Eingang finden. Froh bin ich, dass wir in diesen gut 15 Minuten mit der Graphik auch inhaltlich noch etwas Wichtiges ergänzt haben. Meinem Kollegen überlasse ich die Bühne für die Fortsetzung. Dabei wird klar, dass das wesentliche Schülerinteresse der Klärung der Hausaufgaben und der unmittelbar bevorstehenden Mathematikprobe gilt. Erfahrungsgemäss interessieren Rückmeldungen auf derartige Feedbackbogen nicht sonderlich. Ich werde mich in Zukunft noch kürzer fassen und stärker auf ein paar wenige wesentliche Punkte beschränken.

5.6 Didaktische Interpretation: Methodentrias

Exemplarisch

Wie selten bei einer Thematik kennen wir bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Moment der Geburtsstunde. Anhand der beiden einfach fassbaren Spiele des Chevalier de Méré lassen sich die fundamentalen Gesetze des Zufalls erschliessen. Wir tauchen ein in die Welt der Salons des 17. Jahrhunderts, in die Zeit der beginnenden rationalen Erfassung des Kosmos. Das überraschende Phänomen steht mit den beiden Spielen des de Méré im Zentrum. Das proportionale Denken versagt, wir verstehen die Welt nicht mehr. „Es muss eine Gesetzmässigkeit geben, die wir noch nicht begriffen haben.“ Der Wunsch treibt uns an, unser untaugliches intuitives Verständnis zu überwinden, diese Spiele wirklich zu verstehen und womöglich sogar das Schicksal bestimmen zu können. Diese beiden einfachen, ja klassischen Beispiele für mehrstufige Zufallsversuche sind nicht trivial, aber von drei Seiten her gut erschliessbar: Wir legen die 36 möglichen Würfelpaare aus, zeichnen illustrative Bäume, welche uns die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten begründen, und erstellen eine Graphik im Koordinatensystem zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen dem additiven und dem multiplikativen Ansatz. So findet ein Paradigmenwechsel statt vom intuitiven Erfassen der Situation zur rationalen Durchdringung des Problems. Mit der gewonnenen Einsicht stehen wir auf einer neuen Hochebene. Hier kann jetzt die „Mathematik des Zufalls“ Fuss fassen, sich weiter entwickeln und sich in alle Richtungen ausdehnen. Die Baumdarstellung ist dazu als starkes Instrument dienlich und hilft, die gewonnenen Erkenntnisse auf andere Spiele und in andere Lebensbereiche zu übertragen. Und schliesslich staunen wir, dass überhaupt eine „Mathematik des Zufalls“, eine rationale Erfassung des Unvorhersagbaren möglich ist. Bertrand Russel formulierte es einmal provokativ: „Wie können wir nur von den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit sprechen? Ist Wahrscheinlichkeit nicht die Antithese zu jeglichem Gesetz?“

Die thematische Landkarte zeigt einige der Bezüge auf:



Genetisch

Das Spielen mit Würfeln und die Hoffnung, daraus etwas über die Zukunft ablesen zu können, sind fast so alt wie die Menschheit. Aber erst im 17. Jahrhundert ist die Zeit reif, diese Spiele zu analysieren und sie der Erkenntnis zuzuführen. Anhand der klassischen Spielprobleme des Chevalier de Méré erleben wir authentisch die Problemstellung und ringen mit Pascal um deren Lösung. Leider sind die Briefe von Pascal, in denen er um die Mathematik des Zufalls ringt, nicht erhalten. Dafür erleben wir selbst, wie unser proportionales Denken, dem auch de Méré unterlag, in die Irre führt. Im intensiven Prozess entwickeln wir neue Darstellungsmethoden und Denkweisen, vollziehen heute denselben Paradigmenwechsel wie de Méré damals und erklimmen dabei den Weg auf eine neue Hochebene der Erkenntnis, die Pascal als erster errungen hat. Selten ist es möglich wie an diesem Beispiel, die Geburtsstunde eines Wissenschaftszweiges so konzentriert und klar nachzuvollziehen.

Dramaturgisch

In diesem kurzen Lehrstück von etwa 8 Lektionen geht es ausschliesslich um das Würfelspiel. Insbesondere die beiden Spiele des de Méré sind permanenter Bezugspunkt des Lehrstücks. Als Akteure lernen wir den Chevalier de Méré und Blaise Pascal kennen. Bei de Méré entzündet sich das Problem, mit ihm erleben wir das erste Spiel und seine Variation, welche zur Krise des Verstehens führt. Im verzweifelten Brief an Pascal wird das Problem auf den Punkt gebracht. Damit gelangen wir in die rationale Auseinandersetzung mit dem Phänomen. Von verschiedensten Seiten wird aus Sicht von Pascal die Situation analysiert und mehr und mehr entsteht die Kenntnis über den wahren Sachverhalt. Der Antwortbrief soll die Lösung in verdichteter Form festhalten. Zurück bei de Méré entscheidet sich, ob die neue Hochebene wirklich erreicht ist und die entwickelten Kletterkünste taugen, um derartige Spiele zu verstehen und neue zu entwickeln. Im brieflich verknüpften Hin und Her von de Méré zu Pascal und wieder zu de Méré entwickelt sich dynamisch der Fortschritt der Erkenntnis. Und sollte es nicht genügen, ist ein weiteres Hin und Her möglich. Erst ganz am Schluss wird die strenge Einheit aufgebrochen, werden Perspektiven geöffnet: Einerseits die Übertragung in andere Lebensbereiche und andererseits weg von den regelmässigen Würfeln zu den unregelmässigen Astragali, Thema für ein noch zu entwickelndes späteres Lehrstück.

5.7 Das Lehrstück in der Fachschaft

Dieses Lehrstück wurde bislang in der Fachschaft nicht präsentiert. Dafür habe ich es schon zweimal in der Klasse eines Kollegen inszeniert. Anschliessend an die in diesem Kapitel beschriebene zweite „Gastinszenierung" des Lehrstücks in der Klasse 1A gab mir Herr Rohner auf dem gleichen Fragebogen, den ich den Schülerinnen und Schülern unterbreitet hatte, die folgende ausführliche Rückmeldung:

Ouvertüre: Guter Einstieg ins Thema (motivierend, da alltagsbezogen; interessant, die jahrhundertealte Tradition von Wahrscheinlichkeit und Schicksal zu sehen).

I. Akt: De Mérés Frage: Gut, dass verschiedene Kanäle angesprochen werden. Etwas problematisch, was den Stichprobenumfang betrifft → evtl. überlegen, ob eine anschauliche, verständlich programmierte Computersimulation beigezogen werden könnte. Briefe Schreiben ist gut, da die beobachteten Probleme sauber formuliert werden müssen und die historische Dimension sichtbar wird.

2. Akt: Pascals Antwort – Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Briefbesprechung gut; ev. detailliertere Besprechung der Briefe wünschenswert (was ist gemeinsam, welche Unterschiede gibt es?) Sehr gute Darstellung mit den Doppelwürfen und der Markierung der günstigen Position mit dem Mäppchen. Gute Verallgemeinerung auf grössere Dimensionen. Evtl. hätte das Multiplikationsprinzip der Wahrscheinlichkeiten direkter (bzw. schneller) abgeleitet werden können: m. E. kann es aus der „Haus"-Darstellung ziemlich direkt gesehen werden.

Die graphische Darstellung der Spiele: Sehr gut als Verständnishilfe und „Erlösung" von den Diskussionen, in denen noch zu wenige schlagende Argumente vorhanden waren. Evtl. hätte der Tipp, die Bäume der einzelnen Schritte untereinander (statt nebeneinander) zu zeichnen, früher abgegeben werden können.

III. Akt: De Méré und die Antwortbriefe: Gut als Vertiefung (Kompetenz, Gelerntes [und hoffentlich Verstandenes] auf neue Situation zu adaptieren. Vorteil für die Schüler, dass sie sehen, ob sie das Prinzip der Bäume und der günstigen und möglichen Fälle begriffen haben oder ob sie noch einmal über die Bücher gehen müssen. Schade, dass nur ein Teil der Schüler aktiv die von Pascal vorgeschlagenen und selber entwickelte Spiele untersucht hat. Am Freitag: gute Repetition → Das Prinzip der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten und der Begriff der Wahrscheinlichkeit wird klar. Schade, dass nur wenige neue Spiele von Schülerseite da waren.

Finale mit Rückblick und Ausblick: Guter Bogen zum Einstieg → eignet sich gut, eine „Zwischenbilanz" zu ziehen. Aus dem Text wird deutlich, was eine Wahrscheinlichkeit überhaupt ist (Grad der Gewissheit). Vermutlich kann diese Idee von den Schülern noch nicht gänzlich „verdaut" werden, aber es ist sicher gut, dies schon hier einmal zu erwähnen.

Das Lehrstück im Überblick: Insgesamt sehr gut geeigneter Einstieg ins Thema, da sehr viele Aspekte berücksichtigt werden (kombinatorische, logische, argumentative, historische, philosophische). Das Lehrstück legt eine sehr gute Grundlage, um darauf basierend die Grundideen der Wahrscheinlichkeitsrechnung herauszukristallisieren. Der Zeitaufwand ist angemessen (die „klassische" Einführung der Konzepte und Begriffe würde wohl etwa gleich lange dauern). Zu überlegen wäre der Einsatz von Computerprogrammen zur Simulation von Spielen als empirischer Zugang. Möglicherweise könnten in einer ersten Phase intuitive Argumente der Schüler (z. B. Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten) zunächst ohne grosse Begründung akzeptiert und später darauf zurückgekommen werden.

Kommentar: Diese ausführliche Rückmeldung zeigt, dass Herr Rohner vom Lehrstück und vom Unterrichtsexperiment begeistert ist. Bemerkenswert ist seine Ansicht, dass es nicht mehr Zeit braucht als eine konventionelle Einführung in das Thema. Wie sich der Einsatz einer, m. E. möglichst diskret zu haltenden Computersimulation auswirken wird, muss allenfalls in nächsten Inszenierungen herausgefunden werden. Die Briefe an Pascal lohnt es zu vergleichen, wenn man die formalen sprachlichen Unterschiede genauer betrachten will. Der mathematische Gehalt ist hier zweitrangig. Mit der Baumdarstellung werde ich nächstes Mal zügiger vorgehen, wenn sie nicht von Schülerseite eingebracht wird. Ich werde sie vielleicht ohne Kommentar an die Tafel zeichnen und hören, was die Schülerinnen und Schüler damit anfangen können. Offen bleibt, wie die Jugendlichen zu mehr Variationen der Spiele motiviert werden können. Insgesamt war es ein gelungenes Unterrichtsexperiment. Ich bin neugierig, in welcher Form Herr Rohner künftig seinen Unterricht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnen wird.

Nachdem ich das Lehrstück Ende November 2002 zusammen mit Herrn Stalder ähnlich wie oben beschrieben unterrichtet hatte, führte er das Lehrstück im Dezember 2002 mit seiner Parallelklasse selbständig durch. Auch diesen Dezember nahm er das Stück wieder auf. Zu dieser neusten Erfahrung folgt ein Bericht:

Lektionen 1/2

Das Zimmer ist mit vier Tischen und einem Stuhlkreis in der Mitte als Spielsalon eingerichtet. Historische Illustrationen hängen zeitlich geordnet an der Wand. Die Würfelvielfalt ist auf dem Boden ausgebreitet. Herr Stalder gibt eine kurze Darstellung der Geschichte der Würfel (Astragali, Orakel, Problem von de Méré, heutige Spielwürfel). Dann erfüllt Musik von Lully den Raum. Herr Stalder, leicht verkleidet als de Méré, führt ein ins 17. Jahrhundert, in die Zeit von Louis XIV. De Méré stellt das erste Spiel vor und zeigt wie es gespielt wird, damit allen die Regeln bekannt sind. Es werden die Rollen der de Mérés, der Protokollführenden und Spielenden verteilt und das erste Spiel kann an den verschiedenen Tischen beginnen. Schon bald entsteht das Bedürfnis nach spannenderen Spielen und es folgen Vorschläge. Diese werden vorerst nur gesammelt. Nach rund 20 Minuten werden die Resultate an der Tafel in einer Tabelle zusammengestellt, die Spaltensummen gebildet und Gewinnverhältnisse für die Beteiligten bestimmt. Ein Schüler stellt fest: Es gibt grosse Unterschiede zwischen den einzelnen „Tischen". Ein anderer Schüler bringt die Idee, alle Ergebnisse zusammenzufassen. Die Resultate entsprechen den Erfahrungen von de Méré. Es zeigt sich ein geringer Gewinnvorteil für ihn.

Spielprotokoll für das erste Spiel:

Gesamtzahl der Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Mitspieler
35	18	17
27	20	7
17	6	11
30	14	6
109	58	51
	58/109	51/ 109

Dann werden Spielregeln für Doppelwürfe gesucht und die Überlegungen von de Méré mit den 24 Würfen erläutert. Auch dieses zweite Spiel wird etwa 20 Minuten lang gespielt, die Resultate wieder in einer Tabelle zusammengestellt.

Spielprotokoll für das zweite Spiel:

Gesamtzahl der Spiele	Gewinn de Méré	Gewinn Mitspieler
15	7	8
39	18	21
28	14	14
19	8	11
101	47	54
	47/101	54/101

Wiederum folgt eine kurze Diskussion der Daten. Im Vergleich zum ersten Spiel lassen sich Schlussfolgerungen ziehen. Ein Schüler kritisiert allerdings, dass die Stichproben nicht zuverlässig seien, da viel zu klein. Die Resultate seien daher eher zufällig. Es zeichnet sich das gleiche Resultat ab wie bei de Méré: Er verliert! Als Hausaufgabe werden die Bittbriefe von de Méré an Pascal verfasst.

Lektionen 3/4

Für die zweite Doppelstunde ist das Unterrichtszimmer wiederum als Spielsalon hergerichtet. Die Briefe werden von ihren Verfassern vorgelesen. Da von 36 Möglichkeiten die Rede ist, werden die Würfel ausgelegt. Eine Erklärung für die Resultate ergibt sich nicht. Herr Stalder stellt Blaise Pascal, den Adressaten der Briefe, vor. Darauf sollen die Schüler in Gruppen diskutieren, was sich wohl Pascal überlegt hat. Die Meinungen werden später gesammelt, ausgetauscht und diskutiert, ohne dass schliesslich eine klare Lösung vorliegt. Zum Schluss der Stunde verteilt Herr Stalder einen von Pascal kommenden Antwortbrief, der viele der geäusserten Meinungen beinhaltet. Er entspricht etwa dem Brief von S…, aber ohne die weiteren Spielvorschläge. Die Hausaufgabe besteht darin, den Inhalt des Briefes zu verstehen, ihn mit den Argumenten der Stunde zu vergleichen und eine graphische Darstellung zu finden.

Lektionen 5/6

Der ausgeteilte Brief wird diskutiert. Da keine brauchbare graphische Darstellung gebracht wird, stellt Herr Stalder die Baumdarstellung vor. Die Interpretation des Spiels mit dem Baum ist bald klar. De Méré schickt jetzt einen zweiten Brief an Pascal mit der Bitte um ein paar weitere Spielvorschläge. Die Schüler und Schülerinnen werden aufgefordert, innert zweier Tage zuhause die Antwortbriefe von Pascal an de Méré zu verfassen und abzugeben. Herr Stalder kopiert diese Briefe und verteilt sie wieder. Jeder Schüler erhält drei Briefe zum Studium auf die nächste Doppelstunde.

Lektionen 7/8

Die verschiedenen Briefe mit den neuen Spielvorschlägen werden analysiert. Es müssen dabei exponentielle Ungleichungen und kombinatorische Fragen geklärt werden. Zudem bringt Herr Stalder die in der ersten Doppelstunde geäusserten Spielvorschläge der Schülerinnen zur Bearbeitung ein. So werden alle hängigen Fragen geklärt und das Ziel, eigene Glücksspiele zu entwerfen und zu analysieren, ist schliesslich erreicht. Ein Ausblick auf Versuche mit unregelmässigen Würfeln und auf das Axiomensystem von Kolmogorow rundet das Lehrstück ab.

Kommentar: Das Lehrstück hält sich stark an die anderen Durchführungen. Die Grundstruktur bestätigt sich und bewährt sich im Doppelstundentakt. Die graphische Darstellung muss offenbar meistens von der Lehrkraft eingebracht werden, selbst wenn sie in der Kombinatorik vor mehr als einem Jahr bereits verwendet wurde. Dadurch, dass die Antwortbriefe auf die

Spiele von de Méré nicht geschrieben werden, weicht Herr Stalder von der stärker am historischen Hintergrund orientierten bisherigen Fassung ab. Dafür führt er einen zusätzlichen Briefwechsel ein, der neue Spielvorschläge beinhaltet. Der bisherige Verlauf gefällt mir bezüglich Inhalt und Dramaturgie besser, denn der zentrale Prozess ist das Verstehen der Spiele von de Méré. Dieses Verständnis klar und für de Méré nachvollziehbar in einem Brief auszudrücken ist die grosse Herausforderung. Der Transfer eines Lehrstücks von Kollege zu Kollege ist aber gut gelungen. In diesem Ausmass bleibt er vorläufig ein Einzelfall.

Da Herr Stalder dieses Lehrstück einmal mit mir zusammen und inzwischen bereits zweimal alleine durchgeführt hat, fragte ich ihn kürzlich, was ihn an diesem Lehrstück fasziniere. Es sind die Spielsituationen, die Einbettung der Thematik in den kulturellen Horizont samt dem breiten Bildmaterial. Dies führe zu einem ganzheitlicheren Erleben. Er hat erfahren, dass er im Anschluss an das Lehrstück immer wieder auf das Behandelte zurückgreifen kann. Zudem schätzt er sehr, dass das ganze Material in einem Koffer und einer Mappe bereit steht. Er meint, ohne die erste gemeinsame Veranstaltung würde er dieses Lehrstück allerdings heute nicht selbständig unterrichten.

Rolf Schudel, Vorreiter des Lehrstücks zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, traf ich Mitte Dezember im Seminar Zürich-Unterstrass, wo er seit Jahren Mathematik unterrichtet. Er äusserte grosse Sympathie für kürzere, bündigere Lehrstücke. Seine Fassung der Wahrscheinlichkeit empfindet er als zu lang für den Schulalltag. Es sei schwierig, den Spannungsbogen vom Anfang bis zum Schluss durchzuhalten. Für eine Studienwoche möge es sich durchaus eignen. Nach meiner Ansicht hatte er, wie ich beim Entwerfen des Lehrstücks zum Pythagoras oder zur Stereometrie, am Anfang die ganze Unterrichtseinheit zur Wahrscheinlichkeit im Kopf und dann versucht, alles in ein Lehrstück zu packen. Besser ist es wohl, wenn wir uns auf das Kernproblem konzentrieren und beschränken, wie bei der Wahrscheinlichkeit die Spiele des de Méré. Da lohnt es sich, intensiv zu verweilen und das Zentrale herausschälen, in unserem Beispiel die Nicht-Proportionalität bei mehrstufigen Versuchen und ihre Begründung durch den Baum. Wir waren uns einig, dass ein weiteres kurzes Lehrstück zur statistischen Wahrscheinlichkeit mit Jacob Bernoulli das hier vorliegende Lehrstück ideal ergänzen würde.

5.8 Die Ideengeschichte im Lehrstück

Im Zentrum dieses Lehrstücks steht die Grundidee [10]. Es geht um die Erfahrung, dass man über ungewisse Ausgänge wie das Werfen von Würfeln durchaus mathematische Aussagen machen kann. Zwar wissen wir nicht, was uns der nächste Wurf bringt, aber wir können über die Chancen, dass wir eine Sechs werfen oder dass morgen schönes Wetter vorherrscht, eine Aussage machen. Diese Chancen oder eben Wahrscheinlichkeiten lassen sich sogar miteinander verknüpfen und damit ergibt sich für wesentlich komplexere Ereignisse ein Mass von Gewissheit. So ist es zwar nicht möglich vorauszusagen, ob ich das nächste Spiel gewinnen werde, aber ich kann ein grosses Mass an Gewissheit gewinnen darüber, ob ich auf die Dauer bei einem Spiel erfolgreich sein werde oder nicht. Immer wieder spielen bei den Überlegungen Annäherungen und Grenzprozesse eine Rolle [9]. Gerungen wird lange Zeit um ein zutreffendes Modell [3] für das Spiel mit mehreren Würfeln. Dies ist der Knackpunkt. Erst nach erfolgreicher Überwindung dieser Klippe gilt, was Freudenthal (1973 Bd. II, S. 528) schreibt: „… man kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung fast so direkt wie das elementare Rechnen auf die Wirklichkeit anwenden, d. h. mittels Modellen, die jeder ohne weiteres verstehen kann. ... Um jemandem zu erzählen, was Mathematik ist, und was sie vermag, wählt man seine Beispiele am überzeugendsten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.“ Welches ist die

Wahrscheinlichkeit, dass mit zwei Würfeln eine 5 und eine 6 geworfen wird? Warum werden Wahrscheinlichkeiten bei mehrmaligem Werfen miteinander multipliziert und nicht addiert? Diese Multiplikation lässt sich am Baum hervorragend begründen und führt auf funktionelle Abhängigkeiten [7] exponentieller Art.
Intensives Mathematisieren führt auf eine neue Theorie, ein neues mathematisches Denkgebäude [1], die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freudenthal (1973 Bd. II, S. 536) formuliert: „Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, recht verstanden, die schönste Gelegenheit, Schüler erfahren zu lassen, wie man mathematisiert – sie ist nicht nur die schönste, sondern vielleicht nach dem elementaren Rechnen, die erste und letzte Gelegenheit, nachdem schlecht begriffene Deduktivität andere Zweige der Mathematik überwuchert hat.“ Bei unseren Überlegungen rund um das Würfeln gehen wir immer wieder von idealen Würfeln [2] aus, obwohl unsere Würfel des Alltags nur annähernd diesem Ideal entsprechen. Auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik werden viele Bereiche des Alltags von Zahlen [4] durchdrungen. Auch im Lehrstück werden Daten erfasst, zusammengestellt und ansatzweise interpretiert. Bei der Wahrscheinlichkeit ist der Vorgang des Messens [5] weniger ersichtlich. Es geht darum, ein Mass für die Gewissheit zu finden, wobei der absoluten Gewissheit die Zahl 1 zugeordnet wird.

Im Überblick fasst die Tabelle die Repräsentanz der zentralen Ideen in diesem Lehrstück zusammen:

Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	●●●	●	●●●	●	●		●●●		●●	●●●