

Platonische Körper

Seltsam in seiner unerhörten Regelmäßigkeit, seltsam der Würfel - obwohl wir alle ihn weitgehend kennen. Auf allen seinen sechs Seiten gleichgroß, gleichförmig, gleicheckig, gleichkantig! Läßt sich eigentlich seine Gleichmäßigkeit exakt definieren? Und gibt es noch mehr solche gleichmäßigen Körper, mit denen sich so fair »würfeln« ließe? Mit solchen Fragen treten wir ein in eine der mathematischen Urlandschaften, in das kristallklare Reich Euklids. Und zugleich stehen wir mit Plato in einer der Kernfragen der Philosophie. Denn genau hier an diesen regelmäßigen Körpern hatte zweihundert Jahre vor Euklid Platos philosophische Frage nach der Weltentstehung angesetzt. Und noch zweitausend Jahre später sehen wir seine fünf »Platonischen Körper« in Keplers mathematisch-physikalisch-philosophischem Planetenmodell (vgl. das Titelbild).

Offenkundig sind die >Euklidisch-Platonischen Körper< ein ausgezeichneter und herausfordernder Unterrichtsgegenstand für eine »philosophische Durchdringung und Vertiefung des Fachunterrichts«, »damit nicht das geistige Leben in der Fülle des Stoffes erstickt werde«, was allerdings »eine Unterrichtsorganisation braucht, die dem besinnlichen und verweilenden Arbeiten zu Hilfe kommt, da es um geistige Erfahrungen geht, die dem Gegenstand nicht als Zutat angefügt werden können« - so die Forderungen von Picht/Wagenschein/Spranger/Weizsäcker u. a. »zur inneren Umgestaltung des Unterrichts« (Tübinger Beschlüsse 1951; Deutscher Ausschuß 1964). -Nur wie? Plato pur (vgl. unsere erste Vorlage: Plato ⁶1969, Bd. III, 53 E ff.) - das geht nicht. Immerhin findet sich bei Adam/Wyss (1982) eine auch ästhetisch durchgestaltete Darstellung des Stoffes - vgl. unsere zweite Vorlage: Wyss 1986, S. 575 ff. - aber wie kommen wir weiter zur Lehrstückdramaturgie und Unterrichtsregie? Wir legen hier ein Konzept vor, das sich in zwei sehr gegensätzlichen Schulen bewährt hat - einem radikalreformpädagogischen Landerziehungsheim und einem leistungsorientierten humanistischen Gymnasium - mit nur kleineren Inszenierungsvariationen: etwas mehr Handlungsorientierung dort, etwas mehr Beweisstringenz und kulturgeschichtliche Rahmung hier. Die Mehrdimensionalität dieses Lehrstücks wurde bislang nur innerhalb eines Faches - Mathematik - angespielt, unsere »Platonischen Körper« erklingen bislang erst im mehrstimmigen Klaviersatz, für die Zukunft wünschen wir uns eine fachübergreifende Quartettfassung für Mathematik - Philosophie - Kunst - Geschichte.

Und nun ziemt es sich hiernach zu zeigen, welche Beschaffenheiten es sind, die gerade vier Körper zu den schönsten erheben und zwar so, daß diese zwar unter einander unähnlich, jedoch mit der Fähigkeit ausgerüstet sind, aus einander zu entstehen, für den Fall, daß einige von ihnen sich aufgelöst hätten. Denn haben wir dies erreicht, so sind wir auch im Besitze der Wahrheit über die Entstehung der Erde und des Feuers und der anderen beiden Körper, welche zwischen jenen die mittlere Proportionale bilden, und dann brauchen wir es niemandem zuzugeben, daß schönere Körper als diese vier zu erblicken seien, jeder in seiner Art. Das also ist jetzt unsere Aufgabe, die wohlgeordnete Zusammenfügung dieser vier an Schönheit alle andern überragenden Arten von Körpern zu verfolgen und so zu zeigen, daß wir ihre Natur hinlänglich begriffen haben. ...das gleichschenklige Dreieck aber rief den vierten Körper ins Dasein, indem es zu vierten zusammentretend und die Spitzen der rechten Winkel dabei in einem Mittelpunkte vereinigend, zunächst ein gleichseitiges Viereck hervorbrachte; sechs solche aber, zusammengesetzt, erzeugten sodann acht körperliche Winkel, indem deren jeder aus drei rechtwinkligen Flächenwinkeln zusammengefügt ward. Die Gestalt dieses ganzen, so zusammengesetzten Körpers aber ward die des Kubus, und er enthält sechs viereckige gleichseitige Grundflächen. Da es aber noch eine fünfte Art der Zusammensetzung von entsprechender Eigenschaft gibt, so bediente sich Gott dieser vielmehr für das Weltganze, als er diesem seinen Bilderschmuck gab.

Platon, ca. 450 v. Chr.

Es ist nicht leicht, an die Platonischen Körper heranzukommen und in sie einzudringen. Die abstrakten, geometrischen Formen sind dem Schüler vorerst fremd, zudem tragen sie griechische Namen (Oktaeder, Ikosaeder usw.) Es fehlen die unmittelbaren Erlebnisse wie bei Wagenscheins »Ruf des Raben« oder bei den »Eisenbärten«. Dies erschwert den Einstieg.

Beginnen wir deshalb mit einem vertrauten, alten Bekannten vom Würfelspiel her, mit dem Würfel. Stellen wir uns diesen Körper vor: Über quadratischer Grundlage ragen vier senkrechte Wände empor, eine quadratische Deckfläche schließt das Ganze ab. Von jeder Ecke aus streben in drei Richtungen Kanten weg. Wir gehen um den Würfel herum, tasten uns an ihn heran, zählen seine Flächen, Ecken und Kanten. Es geht dabei nicht darum, den Schülern Wissen beizubringen, sondern »mit Ruhe, Besinnung und Eindringlichkeit Zwiesprache zu halten mit den Dingen« (Martin Wagenschein).

Was spricht aus der Gestalt des Würfels, welcher Charakter tritt uns aus dem Raumgebiet entgegen? Wie ruht es behäbig und fest auf seiner Unterlage! Das lastend Schwere, fast Vierschrötige, Materielle spricht aus seinem Wesen. Wir versuchen, nachzuempfinden, weshalb Plato den Würfel dem Erdenelement zugeordnet hat, wie auch Kepler seine Flächen mit Werkzeugen des Ackers verziert hat.

So rundet sich das Bild dieses ersten Platonischen Körpers. Er ist strengen symmetrischen Anforderungen unterworfen, so regelmäßig wie nur möglich soll er sein, überall Gleichmaß in Flächen, Kanten und Ecken. Die rechtwinklige Struktur hat die Würfelform zum Raummaß erhoben.

Welch ein Unterfangen, wenn Schülergruppen an einem kalten Wintertag daran gehen, aus nassem Schnee einen mächtigen Würfel aufzubauen, baß darob erstaunt, wie viele Karretten Schnee es braucht, bis er dasteht, je ein Meter lang, breit und hoch. Die Wände gesenkelt, nach Strich und Maß glatt poliert, die Ecken mit Winkel und Wasserwaage korrekt gefügt. Über Nacht gefriert er, als wuchtiger Klotz bleibt er stehen, bis ihm die Frühlingssonne an den Kragen geht.

Wyss 1986

Beate E. Nölle mit Hans Christoph Berg / Wolfgang Kroll

Erkennen, was die Welt im Innersten zusammenhält

Die platonischen Körper, frei nach Arnold Wyss, am Gymnasium Philippinum/Marburg und an der École d'Humanité/Goldern (Schweiz)

I. Erinnerungen angesichts einer Ausstellungsvitrine

»Ich wußte gar nicht, daß Mathematik so schön sein kann!« Dieser Satz der Sekretärin des traditionsreichen humanistischen Gymnasium Philippinum in Marburg klingt mir heute noch im Ohr. Direkt vor dem Sekretariat steht eine Vitrine, in der meine Schülerinnen und Schüler aus dem 10. Schuljahr die Ergebnisse ihrer Arbeit ausgestellt haben: Farbige Modelle der Platonischen Körper schweben im Raum, ziehen mit ihren klaren, regelmäßigen Formen die Blicke an und lenken sie weiter auf Zeichnungen, Texte, Tabellen, die sie erläutern.

Wie war es zu alldem gekommen? Am Anfang steht Arnold Wyss. Zusammen mit Paul Adam hat er eines der schönsten Bücher über die Platonischen und Archimedischen Körper verfaßt. Er ist im Laufe seines langen Lebens nicht müde geworden, dieses Thema, das gleichsam sein Lebensthema geworden war, anderen Menschen nahezubringen. Zweimal hatte ich Gelegenheit, ihn zu hören. Seine Ausführungen, obwohl ganz ohne äußere Emphase vorgetragen, wirkten wie von innen erleuchtet: von der Ausstrahlung der Körper, ihrer wunderbaren Regelmäßigkeit und beglückenden Harmonie. Ich begriff, warum sie von jeher das Interesse der Menschen geweckt und deren Schönheitssinn angesprochen haben. Und in mir entstand der Wunsch, meine Schülerinnen und Schüler daran teilhaben zu lassen und damit zugleich die Erinnerung an ein kulturelles Erbe wachzuhalten, das in den Schulen schon fast vergessen scheint.

Die fünf platonischen Körper

Die fünf Platonischen Körper werden von gleichartigen regelmäßigen Vielecksflächen gebildet, wobei in jeder Ecke stets gleich viele Kanten zusammenlaufen. Erkennt man in der Kugel die höchste Stufe der Vollendung in der Regelmäßigkeit von Raumfiguren, so scheinen die Platonischen Körper wie in einer Familie die direkte Nachkommenschaft der >Urmutter Kugel< zu sein: Jeder der Körper läßt sich in eine Kugel derart einbetten, daß alle Ecken genau an ihre Oberfläche stoßen (Umkugel); jeder kann zugleich auch eine Kugel umhüllen, so daß sie von innen die Mitten aller seiner Flächen berührt (Inkugel); in jedem ist obendrein eine dritte Kugel verborgen, die durch die Mitten aller Körperkanten führt (Kantenmittenkugel). So stehen die Platonischen Körper mit der Dreierheit der ihre Gestalt bestimmenden Ecke, Fläche und Kante mit der Kugel in inniger Verbindung.

Vor etwa 2300 Jahren faßte Euklid die Erkenntnisse der früheren griechischen Mathematiker in seinem Hauptwerk »Die Elemente« zusammen und begründete mit seiner Lehre die Geometrie als (erste) mathematische Wissenschaft. Im letzten Buch behandelt er die Platonischen Körper, und es scheint geradezu, als habe er sein Werk allein auf dieses Thema als Höhepunkt und Schlußpunkt ausgerichtet: Jeder von ihnen wird beim Nachweis seiner Existenz in eine Kugel hineinkonstruiert!

Auch wenn dies die älteste überlieferte Darstellung aller fünf regulären Polyeder ist, so werden sie heute fast ausschließlich mit dem Namen Platos verbunden. In seinem Alterswerk »Timaios« beschreibt der griechische Philosoph Plato die Schöpfung der Welt und die Verhältnisse der kosmischen Harmonien, nach denen sie zusammengesetzt ist. Dieses Welt-Modell umfaßt die Welt des Kleinsten und des Größten in einer einheitlichen denkerischen Schau. Dabei schließt Plato an die Vier-Elementen-Lehre seiner Zeit an und greift zur näheren Veranschaulichung und Bestimmung auf die fünf regulären Polyeder zurück: Das Tetraeder (Pyramide), gebildet aus vier gleichseitigen Dreiecken, ist seiner Gestalt nach der spitzeste, durchdringendste Körper und entspricht dem Feuer; das Oktaeder (Doppelpyramide) aus acht gleichseitigen Dreiecken ist auch noch relativ spitz und eindringend - Plato setzt es der Luft gleich; dagegen sieht das Ikosaeder, gebildet aus 20 gleichseitigen Dreiecken, eher rundlich aus und scheint zum Gleiten geeignet, was es dem Wasser verwandt erscheinen läßt; ganz anders das Hexaeder (Würfel, Kubus) - seine sechs Quadratflächen geben ihm eine solide, standfeste Gestalt gleich der Erde. Übrig bleibt das Dodekaeder. Es besteht aus zwölf regulären Fünfecken und nähert sich in seiner Grundgestalt am meisten der Kugel. Für Plato ist es eine Form, die das Allergrößte und Umfassendste darstellt, das Weltganze: Auf den zwölf Flächen des Dodekaeders finden die Tierkreiszeichen des Fixsternhimmels ihren Platz.

»Daß ich erkenne, was die Welt / im Innersten zusammenhält« (Goethe, Faust I) - mit dieser Frage plagte sich nicht nur der PrivatGelehrte Dr. Faustus in seinem Studierzimmer. Plato hat versucht, mit Hilfe der nach ihm benannten Körper eine Antwort zu geben, und Kepler schließt sich ihm rund 2000 Jahre später an, indem er ein Modell des Sonnensystems aus ineinandergeschachtelten Platonischen Körpern entwirft. So bieten nicht nur die Körper selbst, sondern auch ihre Bezüge zur Philosophie, Mathematik, Mineralogie, Astronomie und zur Kunst ein weitreichendes, lohnend-ergiebige Thema für den Unterricht.

Doch im Unterricht liegt der Akzent primär auf den Körpern selbst - so, wie sie jetzt in der Vitrine zu betrachten sind. Mit ihnen, genauer gesagt ihrer Herstellung, hatte die sechzehnstündige Unterrichtsreihe begonnen. Anknüpfend an die ebene Geometrie, in der es zu jeder beliebigen vorgegebenen Zahl ein entsprechendes regelmäßiges Vieleck gibt, hatte ich der Klasse den Würfel als wohlbekanntes regelmäßige Raumfigur vorgestellt. Ausgerüstet mit farbigem Photokarton, Schere, Klebestreifen und Konstruktionswerkzeug begaben wir uns dann selber auf die Suche nach weiteren regelmäßigen Raumfiguren. Aus praktischen Gründen einigten wir uns auf eine einheitliche Seitenlänge - so konnte man jederzeit eigene Flächen gegen andersfarbige des Nachbarn oder Freundes tauschen - und entschieden uns der Einfachheit halber dafür, mit der einfachsten Fläche zu beginnen, dem gleichseitigen Dreieck.

Dieser Einstieg liegt in der Natur der Sache und hat sich als sehr fruchtbar erwiesen. Dabei wird nicht nur Selbsttätigkeit gefordert, sondern auch Selbständigkeit. Die Schüler entdecken - praktisch handelnd und ihr Handeln reflektierend - auf eine fast selbstverständliche Weise, warum es nur fünf reguläre Körper gibt, und vollziehen so, ohne es zu merken, ein Stück Euklid selbständig nach. »Diese Stunden waren kein Matheunterricht, wie wir ihn bisher hatten. Noch nie haben wir so lange etwas erarbeitet«, lautete ein Schülerkommentar. Verweilen, sich vertiefend auf eine Sache einlassen, wann schon sonst gibt der Unterricht dazu Gelegenheit, und das in entspannter, geradezu lustbetonter Atmosphäre. Aus gleichseitigen Dreiecken entstanden nicht nur Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder, sondern es wurden versuchsweise auch zwei Tetraeder aufeinandergesetzt oder zwei Raumecken aus je fünf Dreiecken aneinandergesetzt. Die dadurch entstandenen Körper wirkten allerdings im Vergleich zu Würfel, Tetraeder und Oktaeder nicht recht harmonisch - warum? Im gemeinsamen Unterrichtsgespräch fanden wir es relativ schnell heraus: Die Begrenzung durch reguläre Vielecke gleicher Art reicht nicht aus, vielmehr müssen stets auch in jeder Körperecke gleichviele Flächen zusammentreffen, um ein Höchstmaß an Regelmäßigkeit zu erreichen!

Am Ende dieser Phase war jeder stolz auf das Ergebnis seiner Arbeit, das in Gestalt eines oder mehrerer Platonischer Körper vor ihm lag, und hatte zugleich die den regulären Polyedern zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten in tieferem Sinne verstanden, als wenn sie ihm nur mitgeteilt worden wären. »Einige Polyeder hätte ich mir, ohne sie gebastelt zu haben, gar nicht vorstellen können, und außerdem wäre ich nie darauf gekommen, daß es nur fünf reguläre Polyeder geben kann.« (Schülerzitat).

Dies bestätigte auch die schriftliche Hausaufgabe, die ich im Anschluß daran gestellt habe: »Erläutere und begründe, warum es genau fünf reguläre Polyeder gibt.« Gespannt und neugierig setzte ich mich an die Lektüre der Hefte und war überrascht, erfreut und zugleich beeindruckt, mit welcher Klarheit und Sicherheit die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe gelöst hatten. Auf der Grundlage ihrer praktischen, sinnfälligen Erfahrungen schien zumindest dieser Gymnasialgruppe der Transfer zur abstrakt-theoretischen Begründung nicht besonders schwer gefallen zu sein. Und sie waren nicht wenig überrascht und geschmeichelt, als ich ihnen erzählte, daß Euklid in seinen »Elementen« diesen Beweis auf gleiche Art und Weise geführt hatte!

Reguläre Polyeder

Unter einem Polyeder versteht man einen Körper, der von ebenen Flächen begrenzt wird (gr.: πολυ = viel; εδρα = Sitzfläche). Wird es von regelmäßigen Vielecken gebildet und laufen dabei in jeder Ecke gleich viele Kanten zusammen, nennt man es reguläres Polyeder. Obwohl es unendlich viele regelmäßige Vielecke gibt, ist die Zahl der regulären Polyeder auf fünf begrenzt. Ihre Namen leiten sich von der Anzahl ihrer Flächen ab:

Tetraeder (griech.: Vierflach), Oktaeder (Achtflach), Hexaeder (Sechseck) = Würfel bzw. Kubus, Ikosaeder (Zwanzigflach), Dodekaeder (Zwölfflach).

Die regulären Polyeder heißen auch platonische Körper.

(Informationen zu regulären Polyedern, Schülerarbeit)

Aber zurück zur Vitrine. Am Boden, unter den vielen bunten, darin in verschiedener Höhe aufgehängten Körpermodellen, findet sich ein kleiner >Steckbrief< - schließlich wollten wir den Betrachtern die Möglichkeit geben, sich kundig zu machen und möglichst viel von dem zu sehen, was wir im Laufe der Unterrichtseinheit zu sehen gelernt haben. Außerdem nutzten wir die viereckige Säule im Innern der Vitrine, um zusätzliche Informationen unterzubringen. Dort sind auch Texte Platons und Keplers nachzulesen und die Ergebnisse des zweiten Schwerpunktes unserer Arbeit zu sehen: Zeichnungen der Platonischen Körper als Schrägbilder aus dem Würfelgerüst heraus.

Das war nicht ganz einfach gewesen. Zunächst folgten wir einer Anregung von Arnold Wyss, der die nachfolgende Verwandlungsstudie zur Übung des räumlichen Vorstellungsvermögens besonders empfiehlt: »Einem Würfel werden gleichmäßig nach und nach alle Ecken immer stärker abgeschliffen. Man verfolge schrittweise die Veränderung der Schnittflächen, die von Dreiecken über verschiedene Arten von Sechsecken schließlich wieder zu Dreiecken führt.« (Adam/Wyss, S. 47)

Um die einzelnen Stadien der Verwandlung festzuhalten, bieten sich Zeichnungen der Körperformen an, die im Laufe des Prozesses auftauchen: Würfelstumpf, Kuboktaeder, Oktaederstumpf und schließlich das Oktaeder selber. Diese fünf Hauptstationen hatte ich gezeichnet, auf eine feste Pappe geklebt und passend dazu eine verdeckende Hülle angefertigt, so daß eine Art Schieblehre entstand, mit der ich nach und nach die jeweils >nächste< Form zeigen konnte (s. Abb. 135). Vor jedem Schritt aber überlegten die Schüler selbst, wie der Körper aussehen mußte und warum. Dabei steigerte sich die Spannung in der Klasse immer mehr. Die Schüler äußerten Vermutungen, verwarfen sie, entwickelten neue Ideen und suchten, die anderen davon zu überzeugen. Das Problem hatte sie gepackt, und als beim Oktaederstumpf die Vermutung laut wurde, daß jetzt das Oktaeder kommen mußte, und das letzte Bild der Schieblehre ihnen recht gab, freuten sie sich ganz besonders über ihren Lernerfolg.

Das sich daran anschließende Zeichnen von Würfel, Kuboktaeder und Oktaeder (letztere beide im Würfelgerüst) stellte eine Aufgabe der >schriftlichen Ergebnissicherung< dar und war zugleich Ausgangspunkt einer Reihe weiterer Zeichnungen Platonischer Körper im Schrägbild. Dabei geht es jedoch nicht nur um »Ergebnisse«. Zeichnen im Mathematikunterricht beinhaltet vielmehr die Ausführung und gegenseitige Kontrolle zahlreicher kognitionsbezogener Aktivitäten: Sehen, Handeln, Messen, Rechnen, Vermuten, Mitteilen, Überprüfen, Gestalten ... Die Erkenntnisse müssen genau gefaßt und aus der Vorstellung auf das Papier in Linien und Maßverhältnisse umgesetzt werden. Im Fall der ebenen Darstellung dreidimensionaler Figuren wird darüber hinaus das räumliche Vorstellungsvermögen gefördert und geschult. Und ist dann das Werk endlich gelungen, so bildet es gleichsam selbst den sichtbaren Lohn für die Mühen, die seine Herstellung gekostet hat. Nicht selten beginnen die Schüler dann, ihre Zeichnungen farblich individuell auszugestalten; ein Indiz dafür, welchen Wert sie ihnen beimessen.

Im Zusammenhang mit den Platonischen Körpern bietet der Würfel aus zeichnerischer Sicht einen günstigen Ausgangspunkt, denn mit seiner Hilfe lassen sich alle anderen Platonischen Körper relativ einfach konstruieren. Auf diese Weise ist der zeitliche und technische Aufwand für die Darstellung der anderen Körper relativ gering, und zugleich wird ein nichttrivialer Zusammenhang zwischen ihnen hergestellt. Zunächst also hatten wir das Oktaeder zeichnerisch im Würfel >wiedergefunden<. Beim Tetraeder später entdeckten wir eine andere Besonderheit: Es ließ sich dem Würfel auf zwei verschiedene Weisen einbeschreiben. Überlagerte man beide, so ergab sich der >Tetraederstern<, und die Schüler lernten daran zugleich das Problem der Flächendurchdringung kennen. Die Zeichnung des Dodekaeders erforderte dagegen einige vorbereitende Betrachtungen und Überlegungen. Zunächst einmal zeigte ich mit Hilfe eines Kantenmodells, daß sich auch bei einer Zeichnung des Zwölfflächners der Würfel zugrunde legen läßt. Hier ist es allerdings genau andersherum als bisher: Das Dodekaeder liegt nicht im Würfel, sondern der Würfel ist innerhalb des Dodekaeders verborgen! Umgekehrt brauchten wir uns jetzt nur klarzumachen, daß auf die Seitenflächen eines Würfels Walmdächer einer ganz bestimmten Größe aufgesetzt werden mußten, um ein Dodekaeder zu erhalten. Also bestimmten wir die erforderliche Kantenlänge und Höhe der Walmdächer (damit war zugleich ein kleiner Einblick in die Berechnung von

Raumfiguren gegeben), und konnten mit ihrer Hilfe dann relativ leicht eine Schrägbildzeichnung des Dodekaeders auf einem Würfelgerüst anfertigen. Die darauffolgende Stunde brachte eine Überraschung. Eine Schülerin hatte die Geduld und Konzentration aufgebracht, in ein solches Dodekaeder ein Ikosaeder zu zeichnen, indem sie die Mittelpunkte aller zwölf Dodekaederflächen miteinander verband. Auf diese Weise hatten wir nun alle fünf regulären Polyeder mit Hilfe des Würfels im Schrägbild dargestellt.

Sinnvolle Aufgaben für die obligatorische Klassenarbeit fanden sich leicht: Berechnungen zur Walmdachkonstruktion, Körper - Netzbeziehungen, Abschleifstudien am Ikosaeder beziehungsweise Dodekaeder. Im Mittelpunkt der letzten Aufgabe stand die »Polarität«. Zunächst sollte die Lage des Oktaeders im Würfel beschrieben und umgekehrt ein Würfel in ein gegebenes Oktaeder eingezeichnet werden. Vollkommen eigenständig war dann, die Fragestellung auf das Tetraeder zu übertragen und herauszufinden, zu welchem Körper wohl das Tetraeder polar sei. Und nicht wenige Schüler fanden die richtige Antwort: Die Mittelpunkte der Tetraederflächen bilden wieder ein Tetraeder. Das Tetraeder ist zu sich selbst polar!

Wir haben die Platonischen Körper aber noch aus einer ganz anderen Perspektive betrachtet und dies ebenfalls in der Vitrine dokumentiert: Zwischen einem Textauszug aus Platos »Timaios« und einem Arbeitsblatt mit einer Abbildung des Keplerschen Weltmodells sowie erläuternden Texten, die von ihm selbst stammen, ist an einer Wand der Säule eine Art »Lebenslauf« der Platonischen Körper nachzulesen, der mit Euklid beginnt und über Plato bis zu Kepler und Euler reicht, wobei die einzelnen Stationen in kurzen Sätzen erläutert sind.

Die Schüler hatten sich zunächst überrascht gezeigt, als wir uns auch nach der Klassenarbeit noch weiter mit dem Thema beschäftigen wollten, dann aber waren sie vor allem über die Art und Weise erstaunt, in der dies geschah. Eingeleitet durch kurze Schülerreferate zur Person, deren Leben und Zeit, lasen wir als erstes gemeinsam die entsprechenden Textstellen bei Plato. Und während einige Schüler noch verwundert den Text mit Mathematik in Verbindung zu bringen suchten, bemühten sich andere bereits zu erläutern, aus welchen Gründen Plato gerade diese Zuordnung zu den Elementen vorgenommen habe. Mit großem Einfühlungsvermögen ließen sie sich auf Platos Gedankengang ein, und ihr Bemühen um Verständnis war so groß, daß sie an einer Stelle der Textvorlage sogar einen Übersetzungsfehler vermuteten - die Klärung dieser Frage allerdings überließ ich getrost dem Griechischlehrer ...

Am Ende dieser Stunde stand ein Zitat von Werner Heisenberg, das uns aus der Zeit der griechischen Antike wieder annähernd in die Gegenwart zurückführte: »Die Elementarteilchen können mit den regulären Körpern in Platos »Timaios« verglichen werden. Sie sind die Urbilder, die Ideen der Materie.« (Heisenberg, S.326). Die Art zu denken hat sich seit Plato offenbar nicht wesentlich verändert, nur die Modelle sind andere geworden.

Auch für die Betrachtung des Keplerschen Weltmodells (vgl. Titelbild) nahmen wir uns Zeit, und die Schüler freuten sich besonders, als sie in ihnen »ihre« regulären Polyeder wiederentdeckten. Kepler veranschaulicht mit Hilfe dieses Modells sein Ordnungsprinzip, nach dem das Sonnensystem aufgebaut ist: In einer ganz bestimmten Reihenfolge werden die Platonischen Körper mittels ihrer Inkugeln und Umkugeln derart ineinandergeschachtelt, daß sich die Radien dieser Kugeln zueinander verhalten wie die der Planetenbahnen. Später allerdings mußte Kepler selbst erkennen, daß die Umlaufbahnen der Planeten keine Kreise, sondern Ellipsen sind und sein Weltmodell von daher im streng mathematischen Sinn nicht richtig sein kann. Dem Staunen der Schüler tat dies keinen Abbruch, zumal die tatsächliche Abweichung gering ist. Das Schülerinteresse blieb davon unberührt.

Ein weiteres modernes Ergebnis, das wir Euler verdanken, haben wir nur kurz gestreift; auch, weil die Platonischen Körper nur Sonderfälle - wenngleich sehr wichtige - darstellen, an denen sich die Eulersche Polyederformel demonstrieren läßt. Sie besagt: »Hat ein konvexes Polyeder F Flächen, E Ecken und K Kanten, so gilt: $F + E - K = 2$ «. Ein entsprechend nüchtern-sarkastischer Schülerkommentar lautete: »Das hätten sie uns mal vor der Arbeit sagen sollen ... ! «

Einen abschließenden Höhepunkt bildeten die Kristalle, die ich den Schülern am Ende unserer Unterrichtsreihe zeigte: ein Fluorit, der in der Form eines Oktaeders kristallisiert war, und mehrere Pyrite, die sogar in zwei verschiedenen regelmäßigen Formen Gestalt gefunden hatten, als Würfel und als Oktaeder. Stummes Staunen und offene Verwunderung waren auf den Gesichtern der Schüler abzulesen - »Und die sind wirklich so gewachsen? - Und nicht abgeschliffen?! «. Nein, das waren sie nicht. Offensichtlich hatte die Natur selber schon, lange bevor Menschen sich darüber Gedanken machten, aus sich heraus zu derartigen Formen gefunden.

Die Ausstellungsvitrine im Gymnasium Philippinum zeigt nicht nur die verschiedenen Stationen und Ergebnisse des Weges, den die Schülerinnen und Schüler der 10. Klasse mit mir gegangen waren. Sie selbst ist beredter Ausweis dafür, wie die Unterrichtsreihe bei ihnen »ankam«: Es bedurfte nur einer kleinen Anregung von mir, und schon machte sich die Klasse mit Feuereifer an die Arbeit, um allen anderen zu demonstrieren, was Schule auch sein kann, und das sogar nach der letzten Unterrichtsstunde, schon fast in den Osterferien!

II Grundgerüst und zentrale Bauelemente des Lehrstücks

Unterricht sollte nicht nur Faktenvermittlung anstreben, sondern möglichst auch ein Stück Geschichte - Geistes- und Kulturgeschichte - lebendig werden lassen, wenn er wirklich allgemeinbildend sein will. Hierfür ist das Thema der Platonischen Körper besonders geeignet. Aufgrund der mit ihm gemachten Erfahrungen wird im folgenden ein Konzept dargestellt, das den Bogen noch etwas weiter spannt, als seinerzeit am Gymnasium Philippinum. - Grundlage für einen zweiten Unterrichtsdurchgang in Goldern, worüber ich im abschließenden dritten Teil berichte.

Einstimmung: Geometrie und Philosophie: Geometrie ist die erste Wissenschaft im modernen Sinne. Sie ist eine Schöpfung der griechischen Philosophie aus dem letzten Jahrtausend vor Christus, doch sollte es noch gut ein weiteres Jahrtausend dauern, bis man sich allmählich der Bedeutung für die Erkenntnis unserer Welt bewußt wurde. Am Ende dieses Prozesses aber steht ein großartiges, allegorisches Bild: Raffaels Fresko »Die Schule von Athen«. Ein halbes Hundert antiker Philosophen sind auf ihm vereinigt, gruppiert um die beiden zentralen Gestalten Plato und Aristoteles. Vielfältige figürliche Beziehungen reden dabei eine deutliche Sprache. Es handelt sich um die Vision eines einheitlichen, philosophisch-wissenschaftlich fundierten Weltbildes. Obwohl Raffaels Fresko im Unterricht - zumal im Mathematikunterricht - keineswegs auszuloten ist, eignet es sich gerade wegen seines Reichtums und starken Bildeindrucks besonders gut, um das Interesse zu wecken und an die Quellen der Geometrie zurückzukehren. Es geht aber jedoch nicht darum, abfragbares Wissen zu vermitteln. Die Schüler sollen vielmehr eine >Ahnung< von den Zusammenhängen bekommen, die in ihnen (hoffentlich) weiterwirkt und sie später zu selbständigen Nachforschungen anregt.

Grundlegung: Die fünf regelmäßigsten Körper: Aus lernpsychologischen Gründen ist es wichtig, daß jetzt rasch eine konkrete Grundlegung erfolgt. Wer oder was sind überhaupt >Platonische Körper<, von denen hier die Rede sein soll? Die regelmäßigsten Raumfiguren! Anknüpfend an regelmäßige Vielecke in der Ebene werden die Schüler auf den Weg gebracht, entsprechende Raumgebilde zu suchen und herzustellen, und dies ganz praktisch-handfest mit Schere, Pappkarton und Klebestreifen. Im Laufe dieses Prozesses wird dabei der Begriff der Regelmäßigkeit von Raumfiguren zunehmend präzisiert. Durch eigenes Probieren und Argumentieren können sich die Schüler zudem vergewissern, daß es wirklich nur fünf solche Körper gibt. Wichtige Erkenntnisschritte sind getan, und jeder hat für weitere Überlegungen seine eigenen Modelle als Anschauungsmaterial zur Verfügung.

Vorhandene Verbindungen: Verwandlungsstudien, wechselseitige Beziehungen: Um Beziehungen Platonischer Körper untereinander herauszufinden und damit zu einem tiefergehenden Verständnis zu gelangen, sind nun genauere Betrachtungen notwendig. Besonders geeignet dafür scheinen mir Verwandlungsstudien, wie sie sich bei Arnold Wyss finden. Man beginnt am besten mit dem vertrautesten Körper, dem Würfel: Seine Ecken werden nach und nach zum Würfelzentrum hin abgeschliffen, bis zum Schluß ein gleichsam in ihm verborgen vorhandenes Oktaeder übrigbleibt. Hieraus ergibt sich unmittelbar einsichtig der Zusammenhang zwischen der Anzahl von Flächen, Ecken und Kanten von zwei >polan aufeinander bezogenen Platonischen Körpern. Wichtig ist, daß die Schüler lernen, diesen Prozeß auch in der Vorstellung auszuführen und zu beschreiben und dabei auch die Rollen von gegebenem Körper und polarem zu vertauschen.

Verankerung: Platos Ideenwelt: Nachdem die Schüler wichtige Eigenschaften regulärer Polyeder kennengelernt haben, ist der Zeitpunkt günstig, auf den Beginn zurückzublicken. Was hat dies alles mit Philosophie zu tun? Anhand des Textes in Platos >Timaios< kann über dessen Zuordnung der Körper zu den vier Elementen und dem Kosmos nachgedacht werden, und ein ganz neuer Blickwinkel tut sich auf.

Solide Befestigung: Euklid: Die Kugel ist im Sinne der Regelmäßigkeit der vollkommenste aller Raumkörper. Ihre dreifache Beziehung zu den Platonischen Körpern als Inkugel, Umkugel und Kantenmittenkugel kann von daher sicher als erstaunliches, nicht aber weiter befremdliches Phänomen erfahren werden - sie ist gleichsam die >Mutter< der fünf Geschwister! Für Euklid und die in seinen >Elementen< nachzulesenden Beweise war die Kugel Ausgangspunkt zur Konstruktion jedes einzelnen der fünf regulären Körper. Der Beweisgang allerdings, daß es genau und nur diese fünf regulären Polyeder gibt, kommt ohne die Kugel aus. Bei genauem Hinsehen erweist er sich als der gleiche, den die Schüler bei der praktischen Durchführung zu Beginn erfahren und selbst gefunden hatten!

Wichtige Extremstellen: Makrokosmos und Mikrokosmos: Vorhandene Beziehungen der Platonischen Körper zum Aufbau der Planetenbahnen und zu Kristallformen im Mineralreich führen in zwei entgegengesetzte Bereiche - zum Makrokosmos und zum Mikrokosmos. Keplers Grundidee ist folgende: Bei einer ganz bestimmten Ineinanderschachtelung entsprechen die Größenverhältnisse der Platonischen Körper beziehungsweise der Radien ihrer Inkugeln genau denen der Planetenbahnen zueinander. Anhand einer Abbildung kann man seine Idee anschaulich nachvollziehen, und auch der notwendige Hinweis auf die minimale Abweichung gegenüber der Realität schmälert die Faszination dieses Bildes nicht. Andererseits führen Pyritkristalle, Fluorite und andere

Kristalle in die Mineralwelt und zeigen, daß auch ohne menschliches Zutun Formen und Strukturen regulärer Polyeder in der Natur vorhanden sind. So führt dieser Abschnitt in doppelter Hinsicht zu zwei Extremen: In Makrokosmos und Mikrokosmos sind Strukturen versteckt, die man denkend oder forschend aufdecken kann, die aber als Idee bereits von der Geometrie vorgegeben sind.

Weitere Ausbaumöglichkeiten: Ausblick: Zu der Philosophie (Plato), Raumgeometrie (Euklid), Astronomie (Kepler) und Mineralogie (Kristallformen) kommt selbstverständlich auch noch die rein mathematische Bedeutung regulärer Polyeder und verwandter Formen. Davon wird man im Unterricht allerdings nur wenig bringen können, da dies sehr schnell in die Tiefe führt. Man kann jedoch an den Körpern selber weiterarbeiten, so zum Beispiel Fragen der Oberflächenberechnung, des Volumens, der Raumwinkel und anderes behandeln. Oder man gelangt durch leichte Abschwächung der Regelmäßigkeitsbedingungen in das Reich der Archimedischen Körper, an denen sich ähnliche Studien vornehmen lassen. Die Spannweite des Unterrichtsthemas hat jedenfalls auch für weitergehende Interessen noch Vieles zu bieten.

Die hier sehr konzentriert dargelegten sieben zentralen Bauelemente können ein Grundgerüst, eine Art Leitfaden zur Gestaltung einer Unterrichtsreihe zu Platonischen Körpern geben. Den zentralen Zusammenhalt bildet das Thema selber, aber auch untereinander sind Bezüge gegeben. So korrespondieren >Geometrie und Philosophie< und >Platos Ideenwelt<, sie stehen wie Einladung und inhaltliche Ausführung zueinander. Dabei umgreifen sie die beiden Bauelemente der unmittelbaren Beschäftigung mit und an den Platonischen Körpern als regelmäßige Raumfiguren. Die Begegnung mit >Platos Ideenwelt< leitet zudem als eine Art Wendepunkt zu den geschichtlichen Bauelementen >Euklid< und >Makrokosmos/Mikrokosmos< über. Der Zusammenhang zwischen den Körpern selber und Euklid ist unmittelbar einsichtig durch die Analogie der Wege auf verschiedenen Ebenen. Und schließlich gehören auch die vorhandenen Verbindungen< und >wichtige Extremstellen< zusammen, der Aspekt der Polarität verbindet beide miteinander. Der dem als Wendepunkt erkennbaren Teil zu >Platos Ideenwelt< folgende eher geistes-geschichtliche Teil wird mit einem >Ausblick< abgeschlossen.

III. Ein aus den zentralen Bauelementen des Grundgerüsts gestalteter Wochenkurs

Golderner Schulkultur: Nach und nach fanden sich die Schüler der 9. Klasse ein - wache, freundliche und neugierige Augen von insgesamt elf aufgeweckten Jungen der École d'Humanité im Berner Oberland waren auf mich gerichtet. »Wie wird es wohl sein, mit ihr, eine ganze Woche lang? «

Hatte mich die Ausstellungsvitrine an meine ersten unterrichtlichen Erfahrungen mit dem Thema Platonische Körper zurückdenken lassen, so bot sich mir neun Monate später die Möglichkeit, das >Grundgerüst< mit seinen >zentralen Bauelementen< für und mit einer ganz anderen Gruppe von Schülern auszugestalten. Eine Woche lang standen uns täglich 75 Minuten zur Verfügung, und trotz des einbezogenen Samstags und manch durchgearbeiteter Pause erschien uns die Zeit viel zu kurz!

Die Arbeit an der École d'Humanité jenem von Paul und Edith Geheeb nach ihrer Vertreibung aus der Odenwaldschule in der Schweiz neugegründeten Landerziehungsheim, läßt sich am besten mit Pestalozzis Dreieit »Kopf, Herz und Hand« beschreiben. Dabei orientiert sie sich an den Lehrgängen Martin Wagenscheins, dessen >Exemplarisches Lehren< als »höchste Unterrichtskunst« (Schulbroschüre) gilt. Die Odenwaldschule war in den dreißiger Jahren eine der Hauptwirkungsstätten Martin Wagenscheins gewesen. Aus dieser Zeit stammen die meisten der Beispiele, die er uns aufgeschrieben und nach dem Krieg zum Konzept des »genetisch-sokratisch-exemplarischen Lehrens« verdichtet hat. Eines der neueren Schulgebäude (1986) der École d'Humanité trägt seinen Namen, und der Hauptteil seines Nachlasses hat dort Platz gefunden.

Für mein Vorhaben bot dies die besten Voraussetzungen. Die Atmosphäre war offen, die Schüler aufgeschlossen und bereit, einander zuzuhören, sich gegenseitig wahrzunehmen in ihren Anliegen und Ideen und insofern wirklich miteinander zu arbeiten und zu lernen. Der Lehrer gehörte mit dazu, wurde selbstverständlich akzeptiert und auch gelegentlich befragt. Die Schüler waren ihm aber nicht im Sinne einer >Autoritätsgläubigkeit< ergeben. Die Förderung von Selbständigkeit und Selbsttätigkeit hatte gute Früchte getragen.

Raffaels »Schule von Athen«: Ein großer farbiger Druck mit Raffaels >Schule von Athen< bildete das erste >Bauelemente< auf unserem gemeinsamen Weg zu den Platonischen Körpern (vgl. S.130). Alle großen Philosophen der griechischen Antike sind hier abgebildet, zu Gespräch und Austausch versammelt in einem weiträumigen Tempelgewölbe. Und zumindest den Namen des Mannes vorn links im Bild kennt wohl jeder: Pythagoras. Er sitzt dort, von einer Schülerschar umgeben, schreibt in ein großes Buch, und ein Knabe vor ihm hält eine Tafel, auf der ein Schema die pythagoreische Ton- und Harmonienlehre zeigt. Pythagoras und Musik, Klang (er selber sprach von >Sphärenmusik<)?! Was das wohl mit dem nach ihm benannten Lehrsatz zu tun haben mag?

Aber einen >echten< Geometer gibt es auch auf dem Bild, vorne rechts: Mit dem Zirkel zeichnet er gerade eine Figur auf eine Tafel, und mehrere Jünglinge schauen ihm dabei interessiert zu. Es ist Euklid, der das geometrische Wissen seiner Zeit nach Platos Ideen zu einem großartigen Lehrgebäude zusammenfügte. Sein Buch, »Die Elemente«, begründet die Mathematik als Wissenschaft und wurde seit dem ausgehenden Mittelalter sogar als >das< Schulbuch bis ins 19. Jahrhundert hinein verwendet.

Dann lenkte ich die Blicke der Schüler auf die beiden Zentralfiguren des Bildes, Plato und Aristoteles. Beide sind Philosophen, die denkend zu ergründen suchen, worin das Wesen der Welt, des Lebens und allen Seins besteht. Auf dem Bild erkennt man an ihrer Gestik, wie verschieden beide dabei gedacht haben. Plato deutet mit dem rechten Unterarm und der Hand gen Himmel, wo die Ideen zu erschauen seien, aus denen heraus die Welt gestaltet ist; Aristoteles hingegen hebt schützend und behütend den rechten Arm über die Erde und deutet damit an, daß man die greifbaren Dinge selbst studieren müsse, um in ihnen das Wirken von Ideen als bewegende Kraft zu erkennen. Beide aber schauen sich dabei an, nehmen einander wahr. Beide Denksysteme werden nicht als Gegensätze begriffen, sondern als einander ergänzende bildlich in Harmonie gebracht.

Die fünf regelmäßigsten Körper: Mit dieser kurzen Einstimmung war das Interesse geweckt. Was mochte es wohl mit diesen »Platonischen Körpern« auf sich haben? Bevor wir aber ihre Beziehung zur Philosophie klären konnten, mußten wir sie erst einmal kennen, kennenlernen im Sinne von Aristoteles, und das heißt zuallererst, sie herstellen.

Am Beispiel des Würfels war schnell geklärt, worum es ging: Aus regelmäßigen Figuren (gleichseitiges Dreieck, Quadrat, Fünfeck und so weiter) möglichst regelmäßige »Raumgebilde« aufzubauen. Begeistert waren die Schüler bei der Sache. Der ersten Freude, einen Pappkarton in der Lieblingsfarbe ergattert zu haben, folgte emsiges Zeichnen und Schneiden, Überlegen, Kleben und Zusammenfügen. Hier und da mußte noch ein wenig Hilfestellung gegeben werden bei der Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks und des regulären Fünfecks (wie war das noch mit den Winkeln?), aber auch diese Schwierigkeit war schnell überwunden. Interessant für mich war, daß diese Schülergruppe im Gegensatz zur Klasse am Philippinum relativ rasch versuchte, möglichst viele gleichartige Flächen von vornherein in Form eines Netzes zu konstruieren. Das spart sowohl Material als auch Klebearbeit, erfordert statt dessen allerdings sehr genaue Vorüberlegungen!

Am zweiten Tag setzten wir unsere Entdeckungsreise zu den Platonischen Körpern fort, und ich nutzte den Beginn der Stunde, Ziel und Vorgehensweise zu reflektieren. Beim genaueren Betrachten der bis dahin entstandenen Modelle fiel nämlich auf, daß nicht alle vorliegenden Körper in jeder Hinsicht regelmäßig waren. Einige von ihnen hatten gewissermaßen ein >Oben< und >Unten< (oder war es eher ein >Vorne< und >Hinten?!), andere aber hatten dies nicht, und sie wirkten viel ausgewogener. Im Verlauf unseres Unterrichtsgesprächs entdeckten die Schüler nach und nach, daß außer der Verwendung stets gleicher regulärer Vielecksflächen noch ein weiteres Element der Regelmäßigkeit erfüllt sein mußte. »Gleichviele Flächen in jeder Ecke!«, »Nein, gleichviele Kanten, ich habe sie gezählt!« Oder ist das gar dasselbe?

Nun war es nur noch eine Frage der Zeit, bis alle fünf Platonischen Körper gefunden waren, und die Schüler blickten stolz auf ihre Modelle. Sie zählten jeweils deren Ecken, Flächen und Kanten, legten eine Tabelle dazu an, und ich erklärte ihnen die fünf Namen dazu, die sich jeweils aus dem griechischen Wort der Flächenanzahl herleiteten. »Okta - wie Oktave, und das sind acht Töne!«

Die Frage, ob wir wirklich alle Körper gefunden hatten, erschien den Schülern nicht weiter beachtenswert - schließlich hatten sie es doch selber herausgefunden, und mehr waren eben nicht möglich! Dies noch einmal >theoretisch< zu klären, entsprach nicht ihrem Interesse. Ich begnügte mich daher, ihnen einen Text von Arnold Wyss in die Hand zu geben, in dem dieser den Zusammenhang sehr prägnant zum Ausdruck gebracht hat: »Daß es nur fünf vollkommen regelmäßige Körper geben kann, hat folgende Bewandnis: Eine räumliche Ecke kann nur entstehen, wenn sie von drei oder mehr Flächen umfaßt wird, deren Winkelsumme an der Ecke weniger als 360' beträgt. So wird es möglich, daß gleichseitige Dreiecke zu dritt die Ecken des Tetraeders bilden, zu viert die Ecken des Oktaeders und zu fünft die Ecken des Ikosaeders. Drei rechte Winkel der Quadrate bilden eine Würfecke und drei Fünfeckswinkel eine Ecke des Dodekaeders. Aus mehr als fünf Winkeln von gleichseitigen Dreiecken, mehr als drei rechten Winkeln der Quadrate oder mehr als drei Fünfeckswinkeln können keine räumlichen Ecken entstehen, weil die Summe der eckenbildenden Winkel 360' oder mehr betragen. (Wyss, S.16)

Ein Nicken nach der Lektüre und bei ihrer Besprechung - na klar, so ist es, wir hatten es ja selber in der Praxis so erfahren.

Verwandlungsstudien: Die bereits im Philippinum mit großem Erfolg durchgeführte Vorstellungsübung von Wyss sollte auch hier wieder das dritte >Bauelement< des >Grundgerüsts< darstellen, diesmal aber ganz konkret. Warum sollte dem Herstellen von Flächenmodellen nun nicht auch ein entsprechendes >Volumenerlebnis< folgen?

Schließlich hatten wir es zwar mit Körpern zu tun, deren Begrenzung sie als besondere Gestalten kennzeichnet, nicht aber unbedingt mit Hohl-Körpern. Ich brachte einen 16 cm x 16 cm x 16 cm großen Würfel aus Ton in den Unterricht, den ich tags zuvor geformt hatte, und sagte: »Heute wollen wir uns den Platonischen Körper, den wir am besten kennen, einmal genauer anschauen. Wie verändert sich seine Gestalt zum Beispiel, wenn wir seine Ecken gleichmäßig abschleifen?« Ganz spontan wurden Vermutungen geäußert, ausgetauscht und in Ansätzen durch Begründungen untermauert. Mit einer Drahtschlinge schnitt ich zuerst eine Würfecke ab (ca. $\frac{1}{3}$ Kantenlänge), dann die übrigen drei, die sich oben befanden. Aus den vier Ecken waren gleichseitige Dreiecke entstanden, und die Deckfläche des Würfels hatte sich in ein ziemlich regelmäßiges Achteck verwandelt! Ich schnitt noch ein wenig mehr ab, etwa die Hälfte der ursprünglichen Kantenlänge. Während anfangs der massive Tonkörper und das Aufklatschen der Tonmasse nach jedem Schnitt die Sinne der Schüler primär gefangen genommen hatte, bekam das Erlebnis nun eine neue Qualität: Die ursprünglich quadratische Würfeloberfläche, die nach den ersten Schnitten achteckige Form hatte, war überraschenderweise nun wieder quadratisch! Kleiner zwar, gewiß, und um 45° gedreht, aber wieder quadratisch.

Die Spannung hatte nun alle Schüler ergriffen. Dicht gedrängt standen sie um das Tonmodell herum und versuchten sich vorzustellen, was passiert, wenn die Ecken noch weiter abgeschliffen würden. Wir ritzten die gemeinten Schnitte mit einem Griffel ein und sahen, daß das kleine Quadrat noch kleiner wurde, aus den Dreiecken an den Ecken aber Sechsecke entstanden. Nun konnten wir ähnlich wie derzeit am Philipinum den Gestaltwandel weiter in Gedanken verfolgen. Die Quadrate schrumpfen allmählich zu einem Punkt zusammen, während die neu hinzugekommenen Sechseckseiten gewissermaßen auf Kosten der alten immer länger werden und diese schließlich ganz >aufzehren<. Obwohl der Tonwürfel immer noch konkret vor uns stand, sahen wir mit den inneren Augen das Oktaeder, das in ihm verborgen ist, und waren von der Kraft unserer Vorstellung fasziniert.

Regelmäßige Körper - warum platonisch? Vorn im Kursraum hing noch immer Raffaels Fresko. Jetzt war es Zeit zu fragen, wie die Platonischen Körper zu ihrem Namen gekommen sind. Was hatte die Geometrie mit Platos Philosophie zu tun?

Ich erzählte von Plato, dem antiken Griechenland und der Grundfrage und Aufgabe der Philosophie. Damals war die Idee entstanden, daß die Welt und alle Dinge letztendlich aus verschiedenen >Mischungen<, Zusammensetzungen der vier >elementaren< Bestandteile Feuer, Erde, Wasser und Luft beständen, so, wie man zum Beispiel alle Farbnuancen aus den Grundfarben rot, gelb und blau mischen kann. Plato hatte zu diesen vier Elementen noch das alles umspannende Himmelsgewölbe als fünftes >Element< hinzugedacht und daraus dann die Welt >konstruiert<, indem er jedem von ihnen eins der fünf regulären Polyeder zuordnete, die in ihrer Gestalt die Eigenschaften der Elemente versinnbildlichen sollten.

Zunächst aber sollten die Schüler selbst eine derartige Zuordnung vornehmen und begründen; viele interessante kamen da zustande. Dann aber waren sie neugierig, wie Plato selbst wohl entschieden haben mochte. So lasen wir also gemeinsam die entsprechende Textstelle aus seinem Alterswerk »Timaios«, dem Buch, das Raffael auf seinem Bild Plato in seiner linken Hand halten läßt: »Die durch unsere Untersuchung jetzt entstandenen Arten aber wollen wir aufteilen in Feuer, Erde, Wasser und Luft. Der Erde wollen wir die Würfelgestalt zuweisen, denn die Erde ist von den vier Arten die unbeweglichste und unter den Körpern die bildsamste. So beschaffen muß aber notwendig derjenige werden, welcher die festesten Grundflächen hat..., dem Wasser dagegen die unter den übrigen (von Dreiecken begrenzten Körpern, Anm. d. V) schwerstbewegliche Form, die leichtestbewegliche aber dem Feuer, den größten dagegen dem Wasser, den mittleren der Luft; den spitzesten ferner dem Feuer, den zweiten der Luft, den dritten dem Wasser. Bei diesem allen also muß notwendig dasjenige, welches die wenigsten Grundflächen hat, von Natur das beweglichste sein, indem es das nach allen Richtungen schneidendste und spitzeste von allen ist. Sodann auch das leichteste, da es aus den wenigsten gleichen Teilen besteht; das zweite muß eben dieselben Eigenschaften in zweitrangiger Weise haben, das dritte in dritrangiger ... Diese alle aber müssen wir uns so klein denken, daß jedes einzelne jeder Art für sich seiner Kleinheit wegen von uns nicht gesehen wird, daß wir aber, haben sich viele gemeinsam versammelt, ihre Masse sehen ... (Plato II, S. 105 f.) ... Es war aber noch eine fünfte Zusammenfügung übrig; diese benutzte Gott für das All, als er es ausmalte.« (Plato II, S.103)

Ganz einfach war es nicht, die Sprache und die teilweise doch recht komplizierten Sätze zu verstehen. Auch mochte sich nicht jeder im Kurs den Zuordnungen Platos anschließen - Erde und Würfel, Tetraeder und Feuer, Oktaeder und Luft, Ikosaeder und Wasser sowie Dodekaeder und das Himmelsgewölbe -, aber ein >falsch< oder >richtig< gibt es hier nicht. Viele Menschen aber waren so von Platos Ideen beeindruckt, daß sie die regulären Polyeder als >Platonische Körper< bezeichneten.

Euklids Konstruktion: So waren wir fast unmerklich in die Geschichte der Platonischen Körper eingestiegen und folgten weiter ihren Spuren. Zunächst blieben wir noch im antiken Griechenland, bei einer weiteren Gestalt auf Raffaels Fresko: Euklid.

Anknüpfend an den Beginn des Kurses berichtete ich genauer über Euklids Werk mit dem vielsagenden Titel »Die Elemente«. Sie bestehen aus dreizehn Kapiteln, >Bücher< genannt, und im Buch XIII werden gleichsam als krönender Abschluß die fünf Platonischen Körper behandelt. Euklid zeigt dort, daß es diese Körper überhaupt gibt, indem er sie in eine Kugel hineinkonstruiert, die ja noch regelmäßiger ist als ein reguläres Polyeder. Für einen kurzen Moment stutzten die Schüler, darauf wären sie nicht gekommen. Dann aber schien es ihnen sonnenklar. Die Kugel stellte natürlich die ideale Steigerung und Vervollkommnung des Prinzips der Regelmäßigkeit dar, das den Platonischen Körpern zugrunde liegt. Leider besaß ich damals noch nicht das Mobile mit fünf durchsichtigen Kugeln, in denen jeweils einer der Platonischen Körper zu sehen ist. Dieses Anschauungsmaterial hätte den Schülern sicher große Freude gemacht.

Planeten und Kristalle - platonisch? Von Euklid zu Kepler war es ein großer Sprung und für die Schüler vor allem deshalb erstaunlich, weil sie nicht vermutet hätten, daß die Ideen der Antike auch heute noch eine Rolle spielen. Keplers besonderes Interesse galt dem Aufbau des Kosmos, genauer gesagt der Anordnung und der Größenverhältnisse der Planetenbahnen zueinander, die (fast) kreisförmig um die Sonne verlaufen. Zur Einstimmung las ich den ersten Abschnitt seines Vorwortes zum »Mysterium Cosmographicum« vor: »Lieber Leser! Ich habe mir vorgenommen in diesem Büchlein zu beweisen, daß Gott der Allgütige und Allmächtige bei der Erschaffung unserer beweglichen Welt und bei der Anordnung der Himmelsbahnen jene fünf regelmäßigen Körper, die seit Pythagoras und Plato bis auf unsere Tage so hohen Ruhm gefunden haben, zu Grunde gelegt und ihrer Natur Zahl und Proportionen der Himmelsbahnen, sowie das Verhältnis der Bewegungen angepaßt hat.« (Kepler, 1936, S.19)

Ich erzählte, wie Kepler lange Zeit probiert hatte, die Körper mit Hilfe ihrer Inkugeln und Umkugeln ineinanderzuschachteln, und schließlich eine ganz bestimmte Reihenfolge fand, bei der das Verhältnis der Radien dem der Planetenbahnen entsprach. jeder Schüler erhielt eine Kopie der von Kepler entworfenen Modelle, und sie freuten sich, als sie nach und nach die einzelnen Platonischen Körper wiedererkannten und sahen, wie Kepler diese ineinandergeschachtelt hatte. Ein erstes Verständnis bahnte sich an, auch wenn es kaum mehr war als das Öffnen eines Fensters in eine neue Richtung, in die ein erster, rascher Gesamtblick getan wird.

Hatten wir gerade noch in den weiten Dimensionen des Makrokosmos gedacht, so zeigten sich die Schüler fast noch faszinierter von den Kristallen, die ich ihnen mitbrachte. Sie wanderten von einer Schülerhand zur nächsten, und mühelos erkannten sie im Pyrit den Würfel und im Fluorit das Oktaeder wieder. »Und die sind wirklich so gewachsen, nicht etwa abgeschliffen oder so?« Ja, die Natur hat tatsächlich aus sich heraus schon lange Formen der Platonischen Körper gebildet, während die Menschen sie erst sehr spät wahrgenommen und begonnen haben, sich darüber Gedanken zu machen. Einer dieser Ursprünge liegt in der Schule des Pythagoras.

Ausblick: Für uns war mit diesem sechsten >Bauelement< der Abschluß erreicht. Die mit Kepler und den Kristallen sich eröffnenden Ausblicke versöhnten uns innerlich mit der Tatsache, daß die gemeinsame Woche nun fast zu Ende war. Ich konnte nur noch kurz auf den merkwürdigen, von Euler entdeckten Zusammenhang zwischen den Anzahlen von Ecken, Flächen und Kanten eingehen und damit wenigstens ansatzweise unsere Reise im Sinne des siebten >Bauelementes< vervollständigen. Am Schluß stand neben dem Raffael-Bild die folgende Skizze an der Tafel:

Von jeher ist die Suche nach Einfachheit, Ordnung und Regelmäßigkeit zugleich Ansporn und Ausdruck menschlichen Erkenntnisstrebens. Überträgt man diese Prinzipien auf räumliche Gebilde, so führen sie direkt zu den Platonischen Körpern. Dies allein sollte schon Grund genug sein, das Thema im Schulunterricht ausführlicher zu behandeln.