„Die Mathematik des Zufalls“
Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Würfelspiel verstehen lernen – mit Pascal. Ein Bildungsexempel

Hans Christoph Berg mit Hans Brüngger

I

1. Der Hilferuf De Mérés an Pascal

Sehr geehrter Freund, ich wende mich an Sie in tiefster Verzweiflung. Wie Sie sicher wissen, betätige ich mich im Glücksspiel. Bei meinem 1. Glücksspiel konnte der Spieler 4x würfeln. Würfelte er eine Sechs ging der Einsatz an mich. Dieses war zwar sehr erfolgreich, wurde aber mit der Zeit etwas langweilig. Deshalb beschloss ich ein neues Glücksspiel zu entwickeln. Damit der Einsatz an mich ging, musste ein Spieler eine Doppelsechs werfen. Beim 1. Spiel hatte ich mich für 4 Würfe entschieden, da es ja 6 Möglichkeiten gibt. Beim 2. Spiel machte ich die gleiche Überlegung und wählte 24 Würfe, da es ja 36 Möglichkeiten gibt. Wider Erwarten machte ich jetzt Verlust. Ich habe noch oft darüber nachgedacht, finde jedoch keine Erklärung. – Hiermit bitte ich Sie mein Freund um Rat, da Sie als einer der größten Denker der Zeit gelten. – Hochachtungsvoll, Ihr Freund Chevalier de Méré mit Sekretär Michael

Dies ist einer von zwanzig Berner Schülerbriefen aus einem Berner Oberstufen-Mathematikunterricht, in dem wir die historisch verbürgte Geburt der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachgespielt haben. In seinen fiktiven „Briefen von Pascal an Fermat“ zitiert Rényi: „Somit kann diese Lehre, die die Exaktheit der mathematischen Beweisführung mit der Unsicherheit des Zufalls verknüpft und diese vollständig einander widersprechenden Elemente miteinander versöhnt, mit Recht Anspruch erheben auf die Folgende, die Namen ihrer beiden gegensätzlichen Bestandteile ausborgender, wohl verblüffende Benennung: ‚Die Mathematik des Zufalls'.“ und Rényi führt weiter „meine eigenen Worte rufen beim Wiederlesen das Jauchzen in mir wach über meine Entdeckung, dass sich hier ein neuer Zweig der Mathematik im Werden befindet.“ Ein Nachhall dieses Jauchzens im Mathematikunterricht zu erleben, das wärs doch!

2. Was mag sich De Méré selber gedacht haben? Natürlich ist das eine Frage, mit der wir die SchülerInnen dazu ermutigen wollen, sich möglichst freimütig und kreativ mit ihrem common sense in das Phänomen und Problem hineinzutasten. Und für uns Lehrer ist es eine gute Etúde zur Allgemeinverständlichkeit unseres Unterrichts, wenn wir De Mérés (und unser aller) Amateurgedanken Ausdruck geben, bevor wir Pascals Problemlösung hereinbringen. – Daher stellen wir den Schülerinnen die Aufgabe, Pascal De Mérés Überlegungen vorzutragen und bevor wir sie den Schülern stellen, müssen wir uns selbst dran machen! Also: Weg mit meinem Studienwissen, weg mit den 350 Jahren Mathematikentwicklung seit Pascals Entdeckung 1653, Bernoullis Weiterführung und und und. Denn damals war nur die von heute aus „dumme Frage“ De Mérés, der die Welt nicht mehr verstand, „weil die Mathematik nicht auf die Erfahrung passt“! Was hast Du Dir wohl gedacht bei der Erfahrung Deiner Würfelspiele, cher Monsieur De Méré?

3. Anlage zu De Mérés Brief an Pascal: Wenn eine Sechs durchschnittlich bei jedem 6. Wurf kommt, dann muss eine Doppelsechs natürlich bei jedem 36. Wurf kommen. Das kann man sich doch leicht klarmachen. Nimm einen roten und einen weißen Würfel. Achten wir zunächst auf den roten, die nte Sechs kommt durchschnittlich bei jedem 6. Wurf, klar! Genauso kommt beim weißen Würfel durchschnittlich jedes 6. Mal die weiße Sechs. Aber beide sollen ja zusammenkommen zur Doppelsechs, zum faszinierenden Sechserpasch. Aber meistens liegt natürlich neben der roten Sechs eine weiße Zwei, eine weiße Fünf und so weiter. Und genauso umgekehrt. Wenn beide zugleich kommen sollen, muss ich also durchschnittlich $6 \times 6 = 36$ mal würfeln, bis beide zufällig zusammen fallen. Und somit sind beide Spiele doch mathematisch exakt gleich, denn 24 zu 36, das sind doch 6×4 zu 6×6 und entspricht doch 4 zu 6! So sagt doch jede Logik. Aber die Fakten widersprechen: Mit der Regel „Keine Sechs bei 4 Würfen“ habe ich gewonnen und bin reich geworden; mit der Regel „Keine Doppelsechs bei 24 Würfen“ verliere ich und bin arm geworden. Was ist da los?

4. Kurznotiz Pascals an De Méré: Lieber De Méré, ich bin auf der Spur einer mathematischen Erklärung für Ihre beiden Spiele. Aber wir können unmöglich das zweite Spiel verstehen, bevor wir nicht das Erste verstanden haben. Können Sie denn sich selber und auch mir erklären, warum Sie beim einfachen ersten Spiel gewonnen haben? Und auch wieviel? Ich vermute nämlich, dass schon dabei sowohl Ihre Erfahrungen als Ihre Überlegungen sicher nicht ganz falsch aber doch unvollständig waren! Bitte drücken Sie uns die Daumen, dass meine neue Mathematiküberlegung zum Ziel führt, Ihr Schlaflose-Nächte-Freund Pascal.

5. Kurznotiz De Mérés an Pascal: Lieber Freund, eigentlich haben Sie mir eine sehr einfache Aufgabe gestellt. Da nach dem Gesetz der großen Zahl alle Würfelaugen fast gleichmäßig auftreten – bei 6000 Würfen gibt es ungefähr 1000 mal die Eins, 1000 mal die Zwei usw und eben auch 1000 mal Sechs – kommt bei vier Würfen eben 4/6 mal (= 67%) die Sechs. Meine Gewinnchancen sind also beim ersten Wurf 1/6 (=17%) beim zweiten Wurf 2/6 (= 34 %), beim dritten Wurf 3/6 (= 50%) und beim vierten Wurf 4/6 (= 67%). Nun könnte das auf den ersten Blick unfair erscheinen, aber da ich die gesamten Kosten des Spielsalons trage – für die Musik von Lully, für die Schauspieltruppe von Moliére, sogar König Louis XIV hat uns bereits die Ehre gegeben (er tanzt ja so gern) – daher also fand meine Spielregel keinerlei Kritik, außer dass sie auf Dauer eben ein wenig langweilig wurde.

II

6. Pascal an De Méré: Endlich! Einfach und schön! Lieber Freund, meine Freude ist unbeschreiblich: Ich habe diese Nuss geknackt und meine Mathematikerseele jauchzt. Meinem Mathematikerfreund Fermat habe ich meine Entdeckung geschrieben, er teilt meine Begeisterung. Aber jetzt will ich mich beherrschen und Dir ganz ohne professionelles Rüstzeug die nunmehr entdeckte „Mathematik des Zufalls" an Deinem ersten Spiel vorführen. Fürchte jetzt keine mathematische Steilwandkletterei, nein, jeder Amateur kann hier mitkommen! Zunächst mein Kompliment, zwei von den drei Grundüberlegungen, die wir in unseren mathematischen Ansatz einbeziehen müssen, hast Du richtig erkannt. Die entscheidende dritte hast Du allerdings übersehen. Im Einzelnen:

(1) Die Gewinnchancen bei jedem einzelnen Wurf: Gemäß Deiner Regel 5/6 zu 1/6! Allgemeiner gesagt: *Günstige* Fälle im Verhältnis zu *möglichen* Fällen. Das hast Du richtig gesehen und richtig begründet. So verblüffend unberechenbar der Zufall im Einzelfall ist, so verblüffend berechenbar wird der Zufall in der Vielzahl! Also richtig: Grosso modo kommt die Sechs einmal bei sechs Würfen.

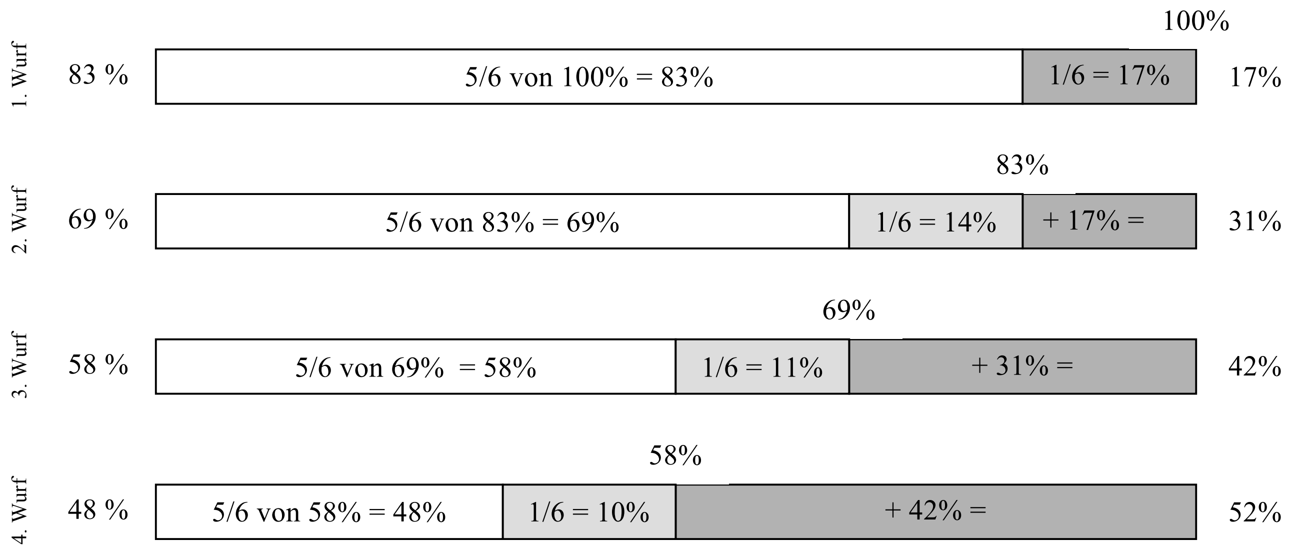
(2) Im Weitergang der Würfe verändern sich Gewinn- und Verlustchancen: Richtig gesehen! Beim ersten Wurf hast du 1/6 Gewinnchance und beim zweiten Mal hast Du wieder 1/6 Gewinnchance. Aber sind das zusammen 2/6 Gewinnchancen? Nein! Denn zweimal 1/6 ist nicht immer 2× 1/6 (= 2/6), jedenfalls nicht beim Hexeneinmaleins der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Denn entscheidend: Im Weitergang der Würfe ändert sich der Bezugsrahmen allerdings nicht linear. Dies ist der entscheidende neue Gedanke in meiner Mathematik des Zufalls. Hier liegt die unscheinbare Knacknuss der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Denn wir müssen das Paradox sehen und verstehen: Obwohl die Chancenverteilung von 5/6 zu 1/6 in allen 4 Würfen unveränderlich bleibt, schrumpfen die Gewinnchancen für Deine Gegenspieler und Deine wachsen, allerdings nicht simpel linear. Beim ersten Blick erscheint das kompliziert, aber bald wird es einfach und schön. Ich will es Dir erklären.

(3) Bitte stell Dir vor, Du spielst als De Méré-Bank nach der Regel „Keine Sechs bei 4 Würfen" nicht bloß gegen *einen* Gegenspieler, sondern gleichzeitig gegen *hundert* (noch besser wären 1000 Gegenspieler, aber da sträubt sich bei mir zwar nicht der Gedanke, aber die Vorstellung). Beim Gongschlag würfeln alle gleichzeitig. Du weißt schon, wie Viele durchschnittlich eine Sechs geworfen haben, 1/6 = 17. Aber du hast nicht daran gedacht, was das für unsere Rechnung bedeutet. Diese 17 Gegenspieler scheiden doch aus, weil sie bereits beim ersten Wurf verloren haben. Beim Gongschlag zum 2. Wurf treten daher nur noch 83 Gegenspieler an. Von denen bleiben natürlich wieder 5/6 übrig (nach eben der selben Gewinnchance wie beim ersten Wurf) – aber es sind eben nur noch 5/6 von 83! Somit verbleiben für den 3. Wurf nur noch 69 und entsprechend für den 4. Wurf nur noch 58 Gegenspieler. Jeweils 5/6 kommen in die nächste Würfelrunde, darin hattest du recht, aber nicht 5/6 von den anfänglichen 100 Gegenspielern, sondern nur 5/6 von der vorhergehenden Runde. Das ist das Heureka der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ich habe Dir das in einer Grafik dargestellt. Und jetzt siehst Du auch die beiden entscheidenden Unterschiede zu Deinen Erfahrungen und Überlegungen. Erstens: Deine Gewinnchance ist bei vier Würfen nicht zwei Drittel, sondern nur gut die Hälfte, deshalb haben deine Gegenspieler dich ja auch nie als unfair und unverschämt empfunden. Zweitens: Würde man weiter würfeln, so würden mit jedem Wurf deine Gewinnchancen wachsen, aber sie wachsen nicht in den Himmel. Und umgekehrt schrumpfen die Chancen deiner Spielgegner nie auf ganz auf 0. Beide nähern sich einer Grenze, erreichen sie aber nie und nimmer. Nach dem 12. Wurf sind immer noch 11 von Deinen 100 Gegenspielern im Spiel und umgekehrt hast Du erst knapp 89% Gewinnchance erreicht.

„Keine Sechs bei vier Würfen“ Spielfortsetzungswahrscheinlichkeiten und Gewinnchancen von

Gegenspieler: „Sechs verliert“ zu „Sechs gewinnt“: Bank/De Méré



7. Pascal an De Méré: Blitzbrief aus der Zukunft: Lieber De Méré, eigentlich hast Du mich ja etwas anderes gefragt, nämlich warum Du bei Deinem ersten Spiel gewonnen und bei Deinem zweiten Spiel verloren hast, obwohl doch beide im Prinzip gleich seien. Und indirekt hast Du natürlich gefragt, wie Du Dein zweites Spiel retten und Dich wieder aus dem Schuldturm befreien könntest. Da Du nun das erste Spiel verstanden hast, könntest Du Dir das zweite sicher auch selber erklären. Aber ich habe noch eine Überraschung für Dich. Denn wer hätte das zu hoffen gewagt: Deine Frage, lieber Freund, samt meiner Antwort sind zur Geburtsstunde einer neuen Mathematik geworden. Eben erreicht mich eine e-Mail (das ist eine Art Blitzbrief) eines 17jährigen jungen Mannes, der im Jahre 2007 in der deutschsprachigen Schweiz in einem (sogenannten bilingualen) Mathematikunterricht auf englisch unsere Wahrscheinlichkeitsrechnung gelernt hat und der nun auf französisch an meine Adresse einen Brief an Dich durchgeblitzt hat, den ich Dir hiermit gerne weiterleite, herzlich Dein glücklicher und dankbarer Freund Pascal.

Cher chevalier de Méré, C'est très intéressant ce que vous avez fait. Naturellement j'ai la solution pour votre problème. J'ai trouvé une formule. La possibilité pour tirer un six est 1/6. La possibilité de ne tirer pas un six est 1 - 1/6. La possibilité de n'avoir pas tiré un six après 4 essais est $(1 - 1/6)^4$ *et ça c'est 48.2%. Alors avec ce jeu, c'est vous qui gagnez plus souvent. Quand on calcule la possibilité de ne tirer pas un double six dans 24 essais, c'est respectivement :* $(1 - 1/36)^{24}$ *et ça c'est 50.9%. Alors, avec le deuxième jeu, c'est l'autre joueur qui gagne plus souvent. Je suis désolé, mais c'est la vie. – Salut B. Pascal et Sécrétaire Benjamin*
P. S. : Si vous voulez faire du profit avec le deuxième jeu vous devriez laisser jouer le jeteur 25 fois et vous gagnez avec une probabilité de 50.6 %!